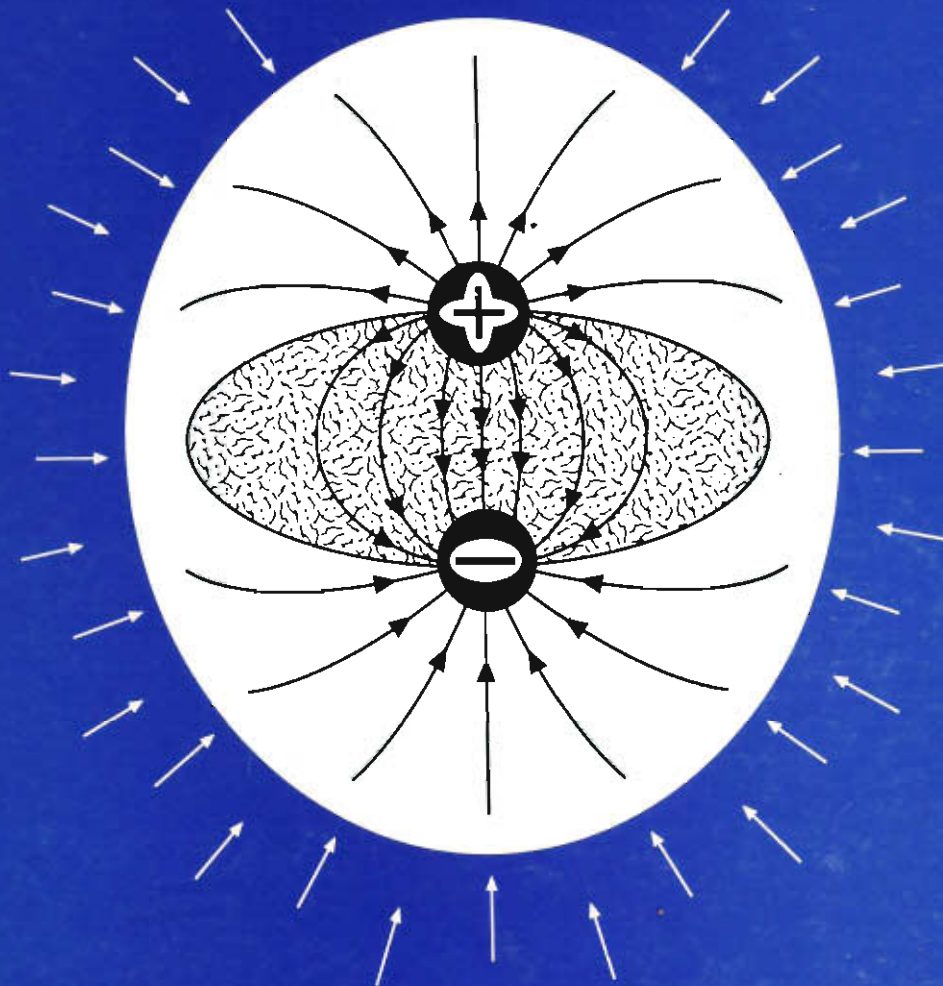


Fuerza y equilibrio

Francisco Medina
Juan Quintanilla



Básicas

C.B. 2892822

Fuerza y equilibrio

Francisco Medina N.
Juan Quintanilla



2892822

UAM-AZCAPOTZALCO

RECTOR

Dr. Adrián Gerardo de Garay Sánchez

SECRETARIA

Dra. Sylvie Jeanne Turpin Marion

COORDINADORA GENERAL DE DESARROLLO ACADÉMICO

Dra. Norma Rondero López

COORDINADOR DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA

Dr. Jorge Armando Morales Aceves

JEFE DE LA SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES

DCG Edgar Barbosa Álvarez Lerín

UAM
Q173
114.35

ISBN: 970-654-497-6

©UAM-Azcapotzalco

Francisco Medina Nicolau
Juan Quintanilla

Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramirez

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Fuerza y equilibrio

1a. edición, 1987

2a. edición, 1999

5a. reimpresión, 2007

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Las páginas que siguen tienen por objeto auxiliar al estudiante en el curso de Fuerza y Equilibrio. La amplitud y la profundidad con que deberá tratarse cada tema están determinados por los objetivos correspondientes, el material de estudio y los problemas propuestos. Podrá recurrirse a los textos indicados en las referencias bibliográficas para conocer el desarrollo detallado de algún tema o el análisis de ejemplos particulares o de otros problemas que deseen resolverse.

Esta guía se encuentra dividida en siete unidades y cada una de ellas en un número variable de secciones. En cada una de las unidades se incluyen los objetivos, el material de estudio, las referencias bibliográficas y los problemas. Antes de cada unidad se indica el nombre de los profesores que la prepararon. Responsable de la elaboración de esta guía fue el Dr. Francisco Medina y junto con el Dr. Juan Quintanilla se llevó al cabo la edición final.

Contenido

Unidad 1	
Introducción a las leyes de Newton	7
Unidad 2	
Equilibrio del cuerpo puntual	27
Unidad 3	
Equilibrio del cuerpo rígido	41
Unidad 4	
Fuerzas de fricción y elástica	59
Unidad 5	
Fuerza y campo gravitacionales	87
Unidad 6	
Fuerza y campo electrostáticos	101
Unidad 7	
Fuerza y campo magnetostáticos	115

UNIDAD 1: INTRODUCCIÓN A LAS LEYES DE NEWTON

1.1 Primera Ley de Newton

1.2 Segunda Ley de Newton

1.3 Tercera Ley de Newton

1.4 Problemas

Preparó: Francisco Medina

Referencias:

U.Haber - Schaim, JB Cross, JH Dodge y JA Walter, PSSC Física, tercera edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975. Capítulos 10, 11 y 14.

D.Halliday y R.Resnick, Fundamentos de Física, CECSA, México, 1978. Secciones 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 y 5.10.

S.Gartenhaus, Física, Interamericana, México, 1979. Secciones 1.4 - 1.9, 4.3 y 4.6.

1.1 La primera ley de Newton

1. Definir cuerpo aislado y marco de referencia.
2. Enunciar la ley de la inercia.

1. La experiencia diaria nos muestra cómo el movimiento de un cuerpo se ve afectado por la proximidad de otros. Sin embargo, ha llevado siglos de largas meditaciones al reconocer que es la Tierra la causante de que las manzanas caigan y de que la Luna se mueva como lo hace. Es el cuerpo y sus circunstancias lo que nosotros percibimos directa y cotidianamente. Pero el cuerpo en sí, ¿cómo se comporta? Para responder esta pregunta habrá que alejarlo de los demás cuerpos con la esperanza de que esto baste para eliminar o, por lo menos, minimizar cualquier acción de éstos sobre aquél. Pues bien, este cuerpo alejado de sus semejantes es, por definición, un cuerpo aislado.

Necesitamos ahora un marco de referencia para describir el movimiento de este cuerpo. Desearíamos tener el marco de referencia, es decir, aquel que se encuentre en absoluto reposo. Podríamos elegirlo de tal manera que estuviera fijo en la Tierra. Sabemos, sin embargo, que ella no sólo se mueve alrededor del Sol, sino también tiene un movimiento de rotación alrededor de un eje. El Sol, a su vez se encuentra en movimiento respecto a las estrellas. Probablemente, lo mejor que podemos hacer es elegirlo de manera que se encuentre fijo respecto a las estrellas, a pesar de que éstas, por su parte, se muevan en el espacio. Adoptemos este marco para colocar un sistema de coordenadas que nos permita determinar la posición de cualquier cuerpo.

2. Observemos un cuerpo aislado desde una distancia considerable. Tendrá la apariencia de un punto. Para nosotros será, entonces, un cuerpo puntual: lo más que podremos determinar son sus tres coordenadas espaciales. De este cuerpo aislado podemos observar lo siguiente:

- i) si el cuerpo está en reposo, es decir, su posición no varía en el transcurso del tiempo, permanecerá en reposo indefinidamente;
- ii) si el cuerpo está en movimiento, lo hace a lo largo de una línea recta, en el mismo sentido, y recorriendo distancias iguales en tiempos iguales. Es decir, conserva la dirección y el sentido de su movimiento, y su rapidez es constante. En suma: su velocidad permanece constante.

Observemos que i) es un caso particular de ii) cuando la velocidad es igual a cero. Sin embargo, es costumbre mencionarlo separadamente.

Lo anterior puede resumirse en la forma siguiente: la velocidad de traslación de un cuerpo aislado permanece constante.

Esta afirmación recibe el nombre de ley de la inercia y es la primera de las tres leyes de Newton.

1.2 La segunda ley de Newton

- 1. Hallar la relación entre la fuerza, la masa inercial y la variación en la velocidad de traslación de un cuerpo puntual.
- 2. Enunciar la ley para el movimiento en dos dimensiones.
- 3. Obtener la fuerza resultante cuando se aplican simultáneamente varias fuerzas.

4. Definir las unidades de longitud, masa y tiempo.

1. Si observamos que la velocidad del cuerpo cambia respecto al marco anclado en las estrellas, el cuerpo ya no se encuentra aislado: su movimiento es modificado por la presencia de los cuerpos vecinos. Se dice que éstos ejercen una fuerza sobre aquél. Fuerza es, entonces, la causa del cambio en su velocidad.

Para establecer una relación cuantitativa entre la fuerza y el cambio en la velocidad, debemos efectuar una serie de experimentos.

En primer lugar, es imposible efectuar un experimento con un cuerpo alejado de los demás. Podemos sin embargo lograr en nuestro laboratorio que un cuerpo se comporte como si estuviera aislado.

Por ejemplo, coloquemos un disco plano sobre una mesa horizontal. Mediante una capa de aire podemos evitar que la superficie del disco se encuentre en contacto con la superficie de la mesa. De esta manera lograremos que una vez puesto el disco en movimiento conserve, en gran medida, constante su velocidad. Aceptemos que el disco se halla en una condición de aislamiento semejante a la que tendría si estuviera alejado de los demás cuerpos. Realicemos ahora una serie de experimentos variando, en cada uno de ellos, sólo una de las cantidades que tienen alguna influencia en el fenómeno.

Experimento 1. El disco se encuentra en reposo. Le aplicamos una fuerza F de dirección constante jalándolo, por ejemplo, mediante un hilo. Después de un cierto tiempo T cortamos el hilo. La fuerza ha dejado de actuar sobre el disco. Observamos lo siguiente:

- i) Cuando deja de actuar la fuerza, el disco continúa moviéndose con velocidad constante;
- ii) La dirección y el sentido de la velocidad coinciden con la dirección y el sentido de la fuerza.

Experimento 2. Para establecer una relación cuantitativa entre la magnitud de la fuerza y la velocidad podemos proceder en la forma siguiente: tomemos arbitrariamente la unidad de fuerza como aquella que produce una elongación de magnitud D en un resorte. Se une el resorte al hilo y se jala al disco manteniendo constante la elongación mientras se aplica la fuerza con objeto de que ésta permanezca constante. El disco parte del reposo, se le aplica la fuerza constante durante el tiempo T y se mide la velocidad adquirida. A esta velocidad le daremos el nombre de velocidad terminal. Hacemos varias observaciones variando el tiempo T de aplicación de la fuerza. Se observa lo siguiente.

- iii) La velocidad terminal es directamente proporcional al tiempo de aplicación de la fuerza constante.

En símbolos $v(T) \sim T$.

Experimento 3. Para analizar el comportamiento del cuerpo cuando se varía la magnitud de la fuerza, debemos tener varios resortes idénticos en todos sus aspectos. Se efectúan sucesivamente pruebas jalando al mismo disco por dos, tres... resortes colocados en paralelo, procurando que la elongación de cada uno de ellos sea igual a D . Con esto aseguramos que la intensidad de la fuerza sea de dos, tres... unidades. En cada una de las pruebas el tiempo de aplicación de la fuerza es el mismo. Se observa lo siguiente:

iv) La velocidad terminal es directamente proporcional a la fuerza aplicada. En símbolos: $v(F) \propto F$

Experimento 4. Para averiguar la dependencia de la velocidad terminal respecto a la cantidad de materia, se necesita disponer de varios discos idénticos en todos sus aspectos. Se hace lo indicado en el Experimento 2 con dos, tres... discos, uno encima del otro, de manera que la cantidad de materia contenida en el cuerpo sea dos, tres... veces mayor que la de un disco. Se observa lo siguiente:

v) La velocidad terminal es inversamente proporcional a la cantidad de materia que contiene el cuerpo. Designando la cantidad de materia por m , la masa inercial, podemos escribir: $v(m) \propto 1/m$.

Resumiendo en una sola ecuación se tendrá $v(m, F, T) \propto FT/m$. Una vez elegidas las unidades en las que se medirá el tiempo, la masa y la longitud, por el signo de igualdad se definirá la unidad de fuerza.

Definimos la velocidad instantánea del cuerpo al tiempo t como $v(t)$, es decir, la velocidad constante con que se movería si al tiempo t dejara de actuar cualquier fuerza sobre el cuerpo.

En los experimentos anteriormente descritos, al aplicar la fuerza sobre el cuerpo, éste se encontraba en reposo, y la dirección de la velocidad terminal era igual a la de la fuerza. ¿Qué pasará si, al aplicar la fuerza, la partícula se encuentra en movimiento? Para responder esta pregunta será necesario efectuar otros experimentos.

Supongamos que al tiempo t_1 la velocidad instantánea del cuerpo es v_1 . Apliquemos desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 una fuerza F de dirección y magnitud constantes, como se muestra en la figura 1. Se mide la velocidad terminal al tiempo t_2 . Deberán efectuarse varios experimentos en los que se cambian, manteniendo constantes los demás, los valores de la velocidad v_1 , la masa m , el tiempo t_1 y la magnitud F de la fuerza. Se observa lo siguiente:

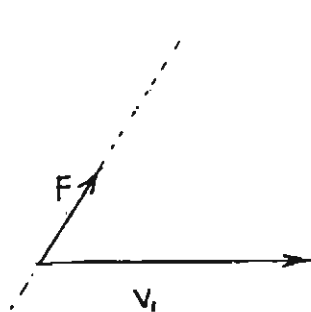


Figura 1

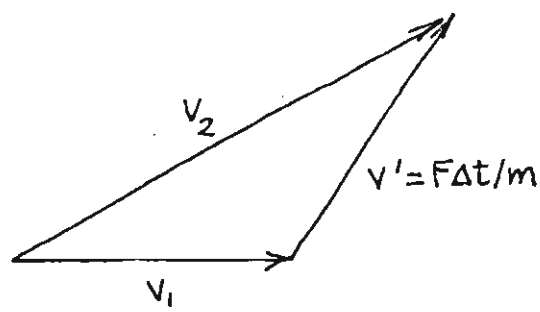


Figura 2

vi) la dirección de la velocidad terminal v_2 no coincide con la dirección de la fuerza. Más bien, la velocidad v' , que une al extremo de v_1 con el de v_2 en la figura 2, tiene la misma dirección que F .

vii) v' es independiente de la velocidad v_1 .

viii) v' es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza constante, directamente proporcional al tiempo de aplicación $\Delta t = t_2 - t_1$ e inversamente proporcional a la masa m de la partícula. En símbolos: $v' = F \Delta t / m$, en la dirección de F .

Es de observarse que v' es igual a la velocidad terminal que tendría el cuerpo si, partiendo del reposo, la fuerza se hubiera aplicado durante el tiempo Δt .

Este resultado puede interpretarse de la manera siguiente: por la ley de inercia, el cuerpo debe conservar la velocidad que tenía al tiempo t_1 . Al sentirse solicitado por la fuerza F debe moverse en la dirección de ésta. El cuerpo responde independientemente a los dos requerimientos, de modo que su velocidad terminal en t_2 contiene equitativamente las dos contribuciones.

Lo anterior puede expresarse también con las siguientes palabras: conforme a la ley de la inercia el cuerpo debe conservar su velocidad; conforme a la ley de la fuerza, debe moverse en la dirección de ésta. Combina estos dos efectos como se muestra en la figura 2. Sin poder renunciar a la propiedad que posee como cuerpo aislado, responde a la acción que sobre él ejercen otros cuerpos.

La forma peculiar de combinarse las velocidades v_1 y v' para obtener la velocidad terminal v_2 nos permite identificarlas como magnitudes vectoriales. Recordemos que, anteriormente, al referirnos a la velocidad, la designábamos por la letra v e indicábamos su dirección y su sentido. Sin embargo, no nos referimos a ella como un vector. Sólo cuando encontramos la forma como se combinan puede dársele la categoría de vector.

En lo sucesivo, las cantidades vectoriales se representarán por el símbolo correspondiente colocándoles una flecha en la parte superior. Así, puesto que la velocidad es un vector, escribiremos \vec{v} . Ya que v' tiene la misma dirección que F y sus magnitudes son proporcionales, $v' \sim F$, debemos aceptar que la fuerza también es una magnitud vectorial, lo que verificaremos posteriormente. Debemos emplear entonces el símbolo \vec{F} para referirnos a ella.

\vec{v}' es la variación en la velocidad del cuerpo, la que denotaremos por $\Delta\vec{v} = \vec{v}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Así podemos escribir la ley del movimiento o segunda ley de Newton como

$$\Delta\vec{v} = \frac{1}{m} \vec{F} \Delta t \quad (1)$$

que es válida para Δt arbitrario cuando la fuerza es constante. Cuando la fuerza varía, es posible aplicar (1) en intervalos de tiempo suficientemente pequeños como para que la fuerza permanezca constante.

3. Sean \vec{F}_1 y \vec{F}_2 dos fuerzas arbitrarias. Apliquémoslas simultáneamente durante un tiempo T cuando el cuerpo se encuentra inicialmente en reposo. Deseamos saber cuál sea la velocidad terminal del cuerpo.

Para esto, podemos proceder en dos formas distintas:

a) efectuar el experimento e interpretar los resultados obtenidos en función de lo que conocemos acerca del comportamiento de los cuerpos frente a la acción de la fuerza, o bien,

b) hacer una predicción y después comprobarla experimentalmente. Sigamos la alternativa b) en el problema que nos ocupa. Consideremos un cuerpo de masa m inicialmente en reposo. Al aplicarle la fuerza \vec{F}_1 durante el tiempo T se tendrá la velocidad terminal $\vec{v}_1 = \vec{F}_1 T/m$. Acto seguido se le aplica la fuerza \vec{F}_2 durante el tiempo T . Si la fuerza \vec{F}_2 se aplicara a partir del reposo, la velocidad terminal sería $\vec{v}_2 = \vec{F}_2 T/m$ en la dirección de \vec{F}_2 . Por lo obtenido en la sección anterior la velocidad terminal será la indicada en la figura 3.

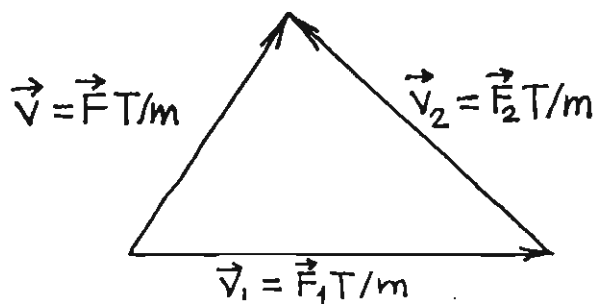


Figura 3

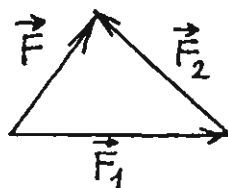


Figura 4

Hubiéramos obtenido la misma velocidad terminal al aplicar primero la fuerza \vec{F}_2 y después la fuerza \vec{F}_1 . Predecimos que obtendremos igual resultado cuando aplicamos simultáneamente las dos fuerzas durante el tiempo T : pensamos que la velocidad terminal del cuerpo deberá reflejar equitativamente la velocidad terminal que produce cada fuerza actuando separadamente, esto es, la aplicación de una de ellas no interfiere sobre el efecto que produzca la otra fuerza.

Puesto que el tamaño de las velocidades terminales \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son proporcionales a la fuerza \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , respectivamente, podemos considerar que la fuerza que produce la velocidad terminal \vec{v} es precisamente \vec{F} , como se indica en la figura 4. Podemos entonces, substituir las dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 por una fuerza única \vec{F} , su resultante, ya que produce una velocidad terminal igual a la que produce \vec{F}_1 y \vec{F}_2 aplicadas simultáneamente.

Ahora podemos ir al laboratorio para verificar nuestra predicción y encontramos que es correcta.

4. Para expresar longitud, masa y tiempo adoptaremos las unidades del Sistema Internacional de Unidades, abreviado S.I.

Dimensión	Unidad	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
velocidad	metro/segundo	m/s
fuerza	newton	N

El kilogramo es igual a la masa del Kilograma Prototipo Internacional (un cilindro de platino-iridio) que se encuentra en la Oficina de Pesas y Medidas en Sevres, París. La unidad de longitud está dada en función de la longitud de onda de cierta radiación electromagnética emitida por el isótopo 86 del átomo de criptón cuando es excitado. La unidad del segundo en función de la frecuencia de cierta radiación emitida por el isótopo 133 del átomo de cesio. Por el momento bástenos saber que estas unidades pueden reproducirse fácilmente en laboratorios bien equipados.

Las unidades de longitud, masa y tiempo son las fundamentales. Las unidades de velocidad y fuerza se derivan de las anteriores.

La unidad de fuerza se derivará de la ecuación de movimiento. Las dimensiones de la fuerza serán = masa x velocidad/tiempo. En consecuencia, la unidad de fuerza será $\text{kg(m/s)}/\text{s} = \text{kgm/s}^2$. Esta unidad recibe el nombre de newton (con n minúscula) y se la designa por el símbolo N.

1.3 La tercera ley de Newton

1. Enunciar la tercera ley de Newton.
2. Demostrar que el momento de un sistema aislado permanece constante; definir centro de masa.

3. Definir diagrama de cuerpo libre.

1. Consideremos dos cuerpos aislados en el universo, aunque pueden interactuar entre sí. Supongamos que podemos distinguir claramente el uno del otro y darles un nombre: el cuerpo A y el cuerpo B.

A no se encuentra aislado de B aunque si lo está del resto del universo. Lo mismo afirmamos de B. Debido a la presencia de B, A sentirá una fuerza, que designaremos por $\vec{F}_{B \rightarrow A}$, esto es, la fuerza que el B ejerce sobre A. Por otra parte, debido a la presencia de A, B estará afectado por una fuerza que la designaremos por $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ esto es, la fuerza que el cuerpo A ejerce sobre el cuerpo B. La tercera ley de Newton afirma que

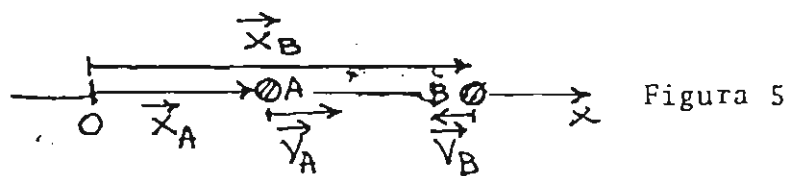
$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

o bien

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{B \rightarrow A} = 0 \quad (2)$$

Consecuencia interesante de esta ley es que la fuerza neta sobre el sistema formado por los dos cuerpos es igual a cero. Si el resto del universo no tiene influencia sobre ellos, el sistema formado por los dos deberá actuar como un cuerpo aislado. O sea, en forma global, este sistema se trasladará con velocidad constante en el marco de referencia fijo en las estrellas.

2. Veamos cuáles son las consecuencias que esta ley tiene sobre el movimiento de los cuerpos A y B. Supongamos que al tiempo t, sus velocidades son \vec{v}_A y \vec{v}_B , respectivamente, y se están moviendo sobre la misma línea recta, como se indica en la figura 5. Consideremos el efecto de la interacción entre ellos durante un pequeño intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, de modo que $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ y $\vec{F}_{B \rightarrow A}$



sean aproximadamente constante. Si m_A y m_B son sus respectivas masas inerciales, la variación en sus respectivas velocidades será:

$$\Delta \vec{v}_A = \frac{1}{m_A} \vec{F}_{B \rightarrow A} \Delta t \text{ y } \Delta \vec{v}_B = \frac{1}{m} \vec{F}_{A \rightarrow B} \Delta t$$

o bien

$$m_A \Delta \vec{v}_A = \vec{F}_{B \rightarrow A} \Delta t \text{ y } m_B \Delta \vec{v}_B = \vec{F}_{A \rightarrow B} \Delta t.$$

Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones se tendrá

$$m_A \Delta \vec{v}_A + m_B \Delta \vec{v}_B = (\vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{F}_{A \rightarrow B}) \Delta t = 0$$

Pero $\Delta \vec{v}_A = \vec{v}_A(t_2) - \vec{v}_A(t_1)$ y $\Delta \vec{v}_B = \vec{v}_B(t_2) - \vec{v}_B(t_1)$

por lo que

$$m_A \vec{v}_A(t_2) + m_B \vec{v}_B(t_2) = m_A \vec{v}_A(t_1) + m_B \vec{v}_B(t_1)$$

Como los tiempos t_1 y t_2 son arbitrarios, la cantidad

$$m_A \vec{v}_A(t) + m_B \vec{v}_B(t)$$

no deberá depender del tiempo, es decir, es una constante del movimiento. La masa de este cuerpo es $M = m_A + m_B$. Intentemos asociar una velocidad global V del sistema tal que

$$M\vec{V} = m_A \vec{v}_A(t) + m_B \vec{v}_B(t) \quad (3)$$

Entonces V permanecería constante. Esta propuesta encuadra bien con lo expresado anteriormente: puesto que la fuerza neta sobre el sistema es cero en alguna forma el sistema deberá trasladarse con velocidad constante.

Afirmamos que esta velocidad constante V es igual a la que observaríamos cuando el sistema se encuentra muy alejado de nosotros de modo que tuviera la apariencia de un punto.

Podemos verificar nuestra hipótesis si en alguna forma hacemos que la fuerza neta sobre el sistema sea diferente de cero. Basta que

sobre A apliquemos una fuerza \vec{F}_A que provenga de otros cuerpos fuera del sistema. Si actúa esta fuerza durante el tiempo Δt puede obtenerse fácilmente la relación.

$$M \Delta \vec{V} = \vec{F}_A \Delta t \quad (4)$$

Nuestra hipótesis es correcta. Ciertamente que es V la velocidad con lo que observaríamos trasladarse el sistema de masa M .

Al producto de la masa m de un cuerpo multiplicado por su velocidad \vec{v} , $m\vec{v}$, recibe el nombre de momento del cuerpo y se designa por la letra \vec{p} . Esto es, $\vec{p} = m\vec{v}$. El momento de un sistema formado por varios cuerpos es igual a la suma de los momentos de cada uno de ellos. En el caso que estamos considerando, el momento del sistema formado por A y B será $\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$. La ecuación (3) expresa el hecho de que si el sistema está aislado, su momento permanecerá constante. La ecuación (4) expresa la forma como este momento varía cuando se aplica una fuerza externa sobre el sistema.

La velocidad \vec{V} recibe el nombre de velocidad del centro de masa. Sean \vec{x}_A y \vec{x}_B las coordenadas de A y B respectivamente. Definamos la coordenada \vec{x}_C del centro de masa formado por los cuerpos A y B como

$$M\vec{x}_C = m_A\vec{x}_A + m_B\vec{x}_B \quad (5)$$

Supongamos que los cuerpos se mueven con las velocidades constantes \vec{v}_A y \vec{v}_B . Durante el intervalo de tiempo Δt , el desplazamiento de A será $\vec{v}_A \Delta t$, y el de B será $\vec{v}_B \Delta t$. En consecuencia, después del intervalo Δt , la posición de A será $\vec{x}_A + \vec{v}_A \Delta t$, y la posición de B será $\vec{x}_B + \vec{v}_B \Delta t$. Después del intervalo Δt el valor de (5) será:

$$\begin{aligned}
m_A(\vec{x}_A + \vec{v}_A \Delta t) + m_B(\vec{x}_B + \vec{v}_B \Delta t) &= \\
(m_A \vec{x}_A + m_B \vec{x}_B) + (m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B) \Delta t &= \\
M \vec{x}_C + M \vec{v} \Delta t &= M(\vec{x}_C + \vec{v} \Delta t)
\end{aligned}$$

Esto es, el centro de masa, durante el intervalo Δt , se desplazó $\vec{v} \Delta t$, por lo que \vec{v} será la velocidad del centro de masa.

3. Newton formuló su tercera ley de la siguiente manera: a toda acción corresponde una reacción de igual magnitud pero de sentido contrario. Si A ejerce una acción sobre B, mediante la fuerza $\vec{F}_{A \rightarrow B}$, a su vez B ejerce una reacción sobre A, mediante la fuerza $\vec{F}_{B \rightarrow A}$. Podemos intercambiar los adjetivos y llamar acción a $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ y reacción a $\vec{F}_{A \rightarrow B}$. Lo importante es que las fuerzas acción-reacción se presentan por parejas, de igual magnitud y de sentido contrario y aplicadas a cuerpos distintos.

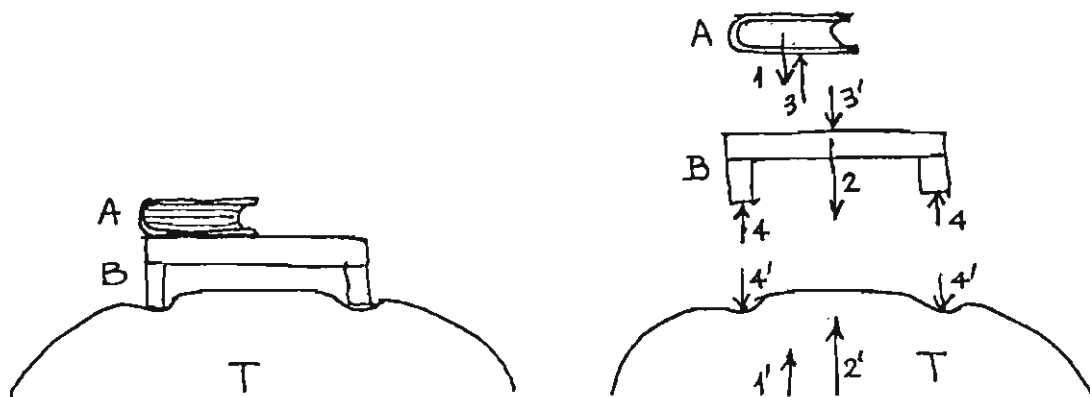


Figura 6.

Para ilustrar lo anterior, consideremos un sistema formado por varios cuerpos aislados del resto del universo. Sea éste el caso de un libro A colocado sobre una mesa B y que se apoya en la superficie de la tierra T, como se indica en la figura 6.

Fuerza			Descripción
1	$T \rightarrow A$	acción	atracción gravitacional de la <u>Tie</u> rra sobre el libro
1'	$A \rightarrow T$	reacción	atracción gravitacional del libro sobre la Tierra
2	$T \rightarrow B$	acción	atracción gravitacional de la <u>Tie</u> rra sobre la mesa
2'	$B \rightarrow T$	reacción	atracción gravitacional de la me <u>s</u> a sobre la Tierra
3	$B \rightarrow A$	acción	fuerza de la superficie de la me <u>s</u> a sobre la superficie del libro
3'	$A \rightarrow B$	reacción	fuerza de la superficie del libro sobre la superficie de la mesa
4	$T \rightarrow (A + B)$	acción	fuerza de la superficie de la <u>Tie</u> rra sobre la superficie de la me <u>s</u> a + libro
4'	$(A + B) \rightarrow T$	reacción	fuerza de la superficie de la me <u>s</u> a del sistema mesa + libro sobre la superficie de la Tierra

Hemos dejado fuera de consideración la atracción gravitacional que la mesa ejerce sobre el libro y la reacción correspondiente. Es de observarse que la fuerza (1) es igual y de sentido contrario a (3). Sin embargo, estas dos fuerzas no son del tipo de acción-reacción: están aplicados sobre el mismo cuerpo, el libro. El diagrama que se hace de un cuerpo en el que se muestra todas las fuerzas que los otros cuerpos del universo ejercen sobre él se llama diagrama de cuerpo libre. En la figura 5 se muestran los diagramas de cuerpo libre correspondientes al libro, a la mesa y a la Tierra.

1.4 Problemas

01 Una fuerza de 5 N se aplica a un cuerpo de 3kg durante 5s.

(a) Calcular la variación en la velocidad. Determinar la fuerza constante que produce la misma variación cuando se aplica durante (b) 2.5 s y (c) 0.5 s.

02. Un cuerpo puede moverse sobre una recta horizontal es sometido sucesivamente a las fuerzas constantes indicadas. Suponer que al tiempo $t = 0$ s se encuentra en reposo:

1) Una fuerza de 3 N hacia la derecha durante 10 s donde la velocidad instantánea es de 10m/s;

2) Una fuerza F que aplicada durante 3s le imprime al cuerpo una velocidad instantánea de 5m/s hacia la izquierda;

3) Una fuerza de 7 N hacia la derecha aplicada durante el tiempo T para que el cuerpo adquiriera la velocidad instantánea de 1m/s.

Hallar: (a) la masa del cuerpo; (b) la velocidad instantánea en $t = 6$ s; (c) la magnitud y el sentido de la fuerza F ; (d) el intervalo de tiempo T .

03. Una misma fuerza F se aplica a diferentes cuerpos que inicialmente se encuentran en reposo. En la tabla se registra el tiempo de aplicación T y la velocidad terminal v del cuerpo. Ordenar los números 1 a 5 de manera que aumente la masa de los cuerpos correspondientes.

cuerpo	1	2	3	4	5
t/s	3.5	7.8	1.3	0.5	3.4
$v/(m/s)$	10.7	9.3	0.4	9.0	15.3



Figura 01

04. (Figura 01) Un cuerpo de masa $m = 5.0$ kg está solicitado simultáneamente por dos fuerzas $F_1 = 3.0$ N y $F_2 = 4.5$ N. Si inicialmente se encuentra en reposo, encontrar la velocidad terminal después de haber aplicado las fuerzas durante 1s. Indicar dirección y sentido respecto a F_1 .

05. Hallar la velocidad terminal del cuerpo del problema 04 si inicialmente la velocidad de éste es de 10 m perpendicular a F_1 dirigida hacia arriba.
06. Un cuerpo de masa $m = 100 \text{ kg}$ se mueve con una velocidad horizontal de 100 km/h a la derecha. Se le aplica una fuerza de 900 N vertical hacia abajo durante un segundo. Expresar la magnitud, dirección y sentido de la velocidad terminal con respecto a la longitud.
07. Discuta las implicaciones del siguiente resultado experimental hipotético: al aplicar una fuerza constante sobre un cuerpo de masa m que inicialmente se halla en reposo, la velocidad terminal es proporcional al cuadrado del tiempo de aplicación, esto es, $v(T) \sim T^2$.
08. Usando como cantidades fundamentales la fuerza (N), la longitud (m) y el tiempo (s), ¿Cuáles serán las dimensiones y las unidades en las que se medirá la masa?
09. (a) Hallar la posición del centro de masa de un sistema de dos cuerpos puntuales A y B; $x_A = +10\text{m}$, $x_B = -5\text{m}$ y $m_A = 40\text{kg}$, $m_B = 70\text{kg}$; (b) si $v_A = 70\text{m/s}$ y $v_B = 30\text{m/s}$, encontrar la velocidad del centro de masa.
10. (Figura 02) Tres esferas iguales de peso P se encuentran acomodadas en una caja. Hacer un diagrama de cuerpo libre para cada una de las esferas y para la caja.
11. (Figura 03) Dos esferas carentes de peso se encuentran dentro de una caja como se indica en la figura. Todos los resortes están comprimidos. Dibujar los diagramas de cuerpo libre de los siguientes sistemas:
 (a) de la esfera A; (b) de la esfera B; (c) de la caja C; (d) del sistema formado por A y C; (e) del sistema formado por B y C.

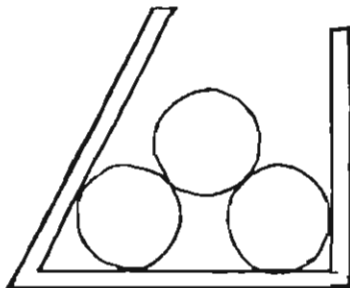


Figura 03

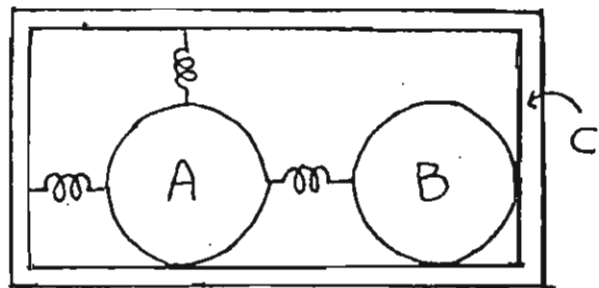


Figura 04

UNIDAD 2: EQUILIBRIO DEL CUERPO PUNTUAL

2.1 Equilibrio del cuerpo puntual

2.2 Problemas

Preparó: Francisco Medina

Referencias:

D. Halliday y R. Resnick, Fundamentos de Física, CECSA, México, 1978. Capítulo 12.

S. Gartenhaus, Física, Interamericana, México, 1979, Sección 5 - 2.

JL Meriam, Estática, segunda edición, Editorial Reverté, SA, Barcelona, 1976, Capítulos 2 y 3.

2.1 Equilibrio del cuerpo puntual

1. Sumar dos fuerzas y descomponer una fuerza en dos direcciones arbitrarias.
2. Sumar fuerzas coplanares sumando sus componentes rectangulares.
3. Aplicar lo anterior a la solución de algunos problemas de equilibrio.

1. Sean \vec{F}_1 y \vec{F}_2 dos fuerzas arbitrarias. Como ya se estableció en la Unidad 1, el efecto que producen sobre un cuerpo al aplicarlas simultáneamente es el mismo que el producido por una sola fuerza \vec{F} , la suma o resultante de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , que se obtiene como se indica en la figura 1.

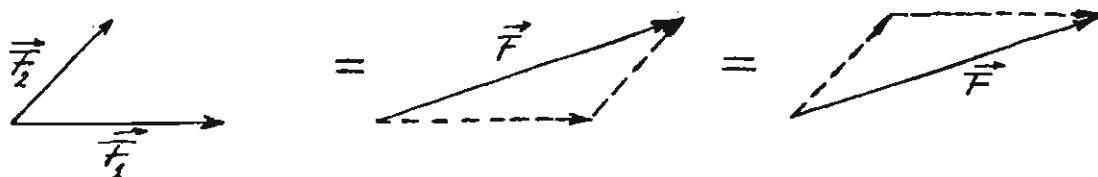
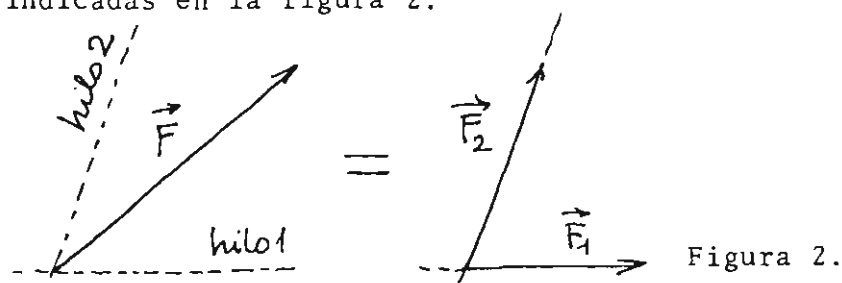


Figura 1.

Esta operación es básica en la solución de multitud de problemas. Si sobre un cuerpo están actuando varias fuerzas necesitamos conocer su suma para saber en cuánto variará su velocidad. En particular, si queremos que el cuerpo permanezca en reposo, debemos asegurarnos de que la suma de todas las fuerzas aplicadas sea igual a cero.

Frecuentemente se presenta el problema inverso al de la suma de fuerzas. Queremos aplicar a un cuerpo una fuerza F determinada. Pero, por limitaciones físicas, sólo es posible aplicar fuerzas a lo largo de ciertas direcciones. Entonces es necesario descomponer la fuerza a lo largo de esas direcciones. Por ejemplo, para

aplicar la fuerza \vec{F} sólo disponemos de dos hilos cuyas direcciones están indicadas en la figura 2.



La suma de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 es igual a \vec{F} . Nuestro problema está resuelto.

Es de observarse, sin embargo que cuando se desea descomponer una fuerza en más de dos direcciones la solución no es única.

Brevemente presentaremos algunos métodos que pueden servirnos para efectuar estas operaciones.

(i) Método gráfico. Se traza a escala las fuerzas que intervienen y se encuentra gráficamente la resultante aplicando la regla indicada en la figura 1. Se mide el tamaño de la resultante para encontrar su módulo y el ángulo que esta forma con una dirección que se estime pertinente. Este método es de valor inapreciable cuando intervienen varias fuerzas y varios puntos de aplicación, como es el caso de problemas que se presentan al encontrar las fuerzas que actúan sobre las barras de una armadura.

(ii) Método trigonométrico. Valiéndose de las funciones trigonométricas y de las reglas del seno y del coseno puede encontrarse el módulo de la resultante y el ángulo que ésta forma con alguna dirección que elijamos.

Ejemplo 1. Hallar la resultante de las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 indicadas en la figura 3a. Conviene trazar gráficamente la resultante:

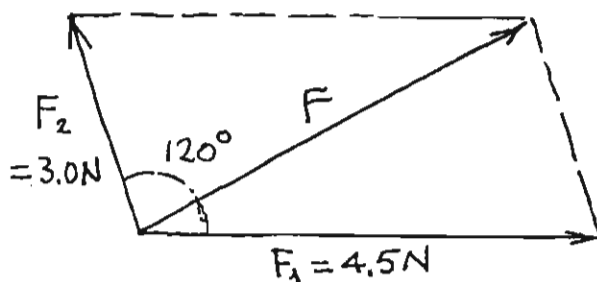


Figura 3a.

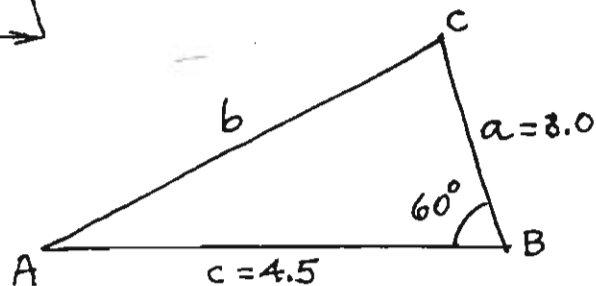


Figura 3b.

El triángulo ABC es semejante al triángulo definido por las fuerzas \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F} de modo que si calculamos b y, por ejemplo, el ángulo A habremos resuelto el problema.

Aplicando la regla del coseno obtendremos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (4.5)^2 + (3.0)^2 - 2(4.5)(3.0) \cos 60^\circ$$

$$= 20.25 + 9.00 - 13.50 = 15.75, \therefore b = 3.97$$

El módulo de \vec{F} es igual a 3.97 N.

Por la regla de los senos podemos encontrar el ángulo A:

$$\text{sen} A = (a/b) \text{sen} B = (3.0/3.97) \text{sen} 60^\circ$$

$$= 0.654, \therefore A = 40.8^\circ$$

El ángulo que forma \vec{F} con \vec{F}_1 es de 40.8°

Ejemplo 2. Descomponer la fuerza \vec{F} en las direcciones indicadas en la figura 4a. En la misma figura se muestra la solución gráfi

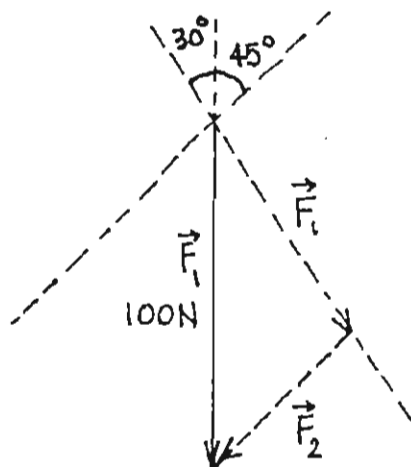


Figura 4a.

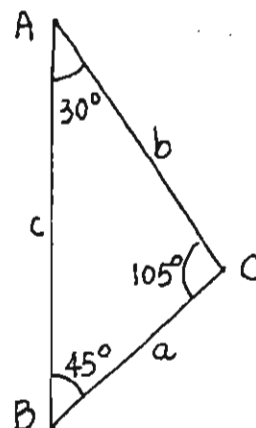


Figura 4b.

ca del problema. Para resolverlo en forma trigonométrica consideremos el triángulo ABC de la figura 4b que es semejante al triángulo definido por las fuerzas \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F} de la figura 4a.

Bastará calcular a y b para resolver el problema.

Por la regla de los senos se tendrá:

$$b = (\text{sen}B/\text{sen}C) \quad c = (\text{sen}45^\circ/\text{sen}105^\circ)(100)$$

$$= (0.7071/0.9659)(100) = 73.2$$

$$a = (\text{sen}A/\text{sen}C) \quad c = (\text{sen}30^\circ/\text{sen}105^\circ)(100)$$

$$= (0.5000/0.9659)(100) = 51.8$$

Los módulos de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 son 73.2N y 51.8N, respectivamente.

2. En un buen número de problemas es conveniente descomponer una fuerza en dos direcciones perpendiculares entre sí. En este caso el ángulo C de la figura 4b sería igual a 90° y puesto que $\text{sen}90^\circ = 1$, los cálculos se simplifican.

Estén dadas estas dos direcciones por la de los ejes x e y de un sistema rectangular de coordenadas como se indica en la figura 5.

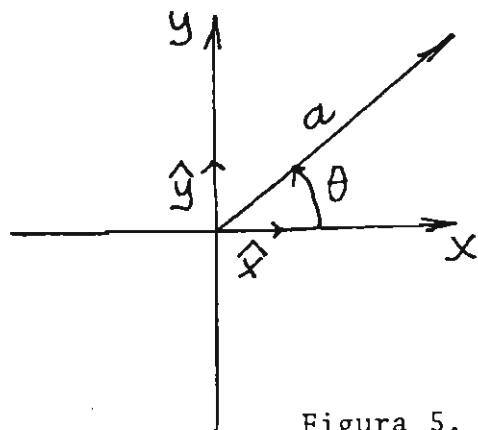


Figura 5.

Todo vector \vec{a} podrá expresarse unívocamente especificando su módulo a y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje x .

Este ángulo podrá formar cualquier valor entre 0 y

2π . Frecuentemente se emplea el sistema sexagesimal

para expresar este ángulo y se le usa con estas unidades como argumento de las funciones trigonométricas. Aunque este uso no es correcto se acepta generalmente. De hecho, hemos adoptado esta forma de expresión en el inciso anterior.

Sea \hat{x} un vector de módulo unidad cuya dirección y sentido están dados por la dirección positiva del eje x ; análogamente definimos al vector \hat{y} con respecto al eje y . Usualmente estos dos vectores se designan por los símbolos \hat{i} e \hat{j} . Usaremos la notación propuesta porque fácilmente puede generalizarse cuando se emplean otros sistemas de coordenadas distintos al cartesiano.

Todo vector a podrá expresarse como la suma de dos vectores, uno a lo largo de x y otro a lo largo de y . Esto es

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y}$$

a_x y a_y reciben el nombre de componentes cartesianos o rectangulares del vector \vec{a} . De la figura 5 se puede deducir inmediatamente

2892822

que

$$a_x = a \cos \theta \quad \text{y} \quad a_y = a \sin \theta$$

Recíprocamente, si se conocen las componentes cartesianas a_x y a_y puede encontrarse a y θ :

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1}(a_y/a_x)$$

La suma de dos vectores puede encontrarse fácilmente. Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores. La suma de ellos estará expresada por:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y}) + (b_x \hat{x} + b_y \hat{y}) \\ &= (a_x + b_x) \hat{x} + (a_y + b_y) \hat{y} \end{aligned}$$

Esto es, para hallar las componentes del vector suma, bastará su mar las respectivas componentes de los vectores sumando.

Ejemplo 3. Para ilustrar el empleo y la utilidad de este método, encontraremos la resultante de tres fuerzas aplicadas sobre un cuerpo puntual de la manera mostrada en la figura 6.

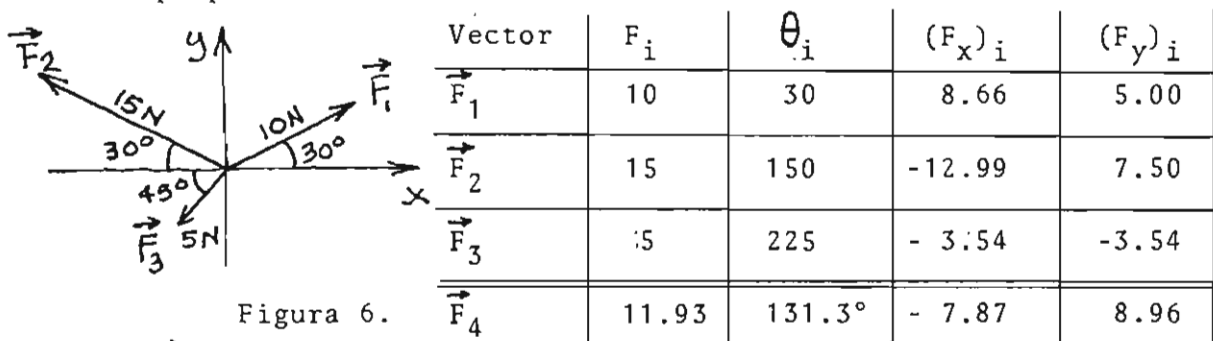


Figura 6.

Sea \vec{F}_4 la resultante de las tres fuerzas. Para efectuar los cálculos en forma ordenada y presentarlos claramente, puede ser con veniente elaborar una tabla en la que se consignent las cantidades que intervienen.

Ordenadamente en las columnas se consigna el vector, su módulo, su ángulo θ en grados y sus componentes x e y .

Los tres primeros renglones corresponden a los vectores sumandos y el cuarto al vector suma. Para encontrar este último, después de haber encontrado las componentes de cada vector, se encuentran las componentes del vector suma. A partir de estas últimas, se encuentra el módulo del vector suma y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje x .

3. El objeto principal de esta unidad es el de calcular las fuerzas de acción-reacción que aparecen en un sistema que se encuentra en reposo. Cuando estas fuerzas son fácilmente identificables, esto es, se encuentran actuando en direcciones bien definidas, bastará demandar que la resultante de las fuerzas sobre cualquier cuerpo o punto del sistema sea igual a cero para que éste permanezca en reposo.

Ejemplo 4. Como se ilustra en la figura 7a se sostiene un cuerpo que pesa 667 N mediante dos cables sujetos en una viga. Sabiendo que el sistema formado por el cuerpo y la viga se encuentra en reposo, determinar las tensiones en los cables.

En la figura 7b se tiene el correspondiente diagrama de cuerpo li-

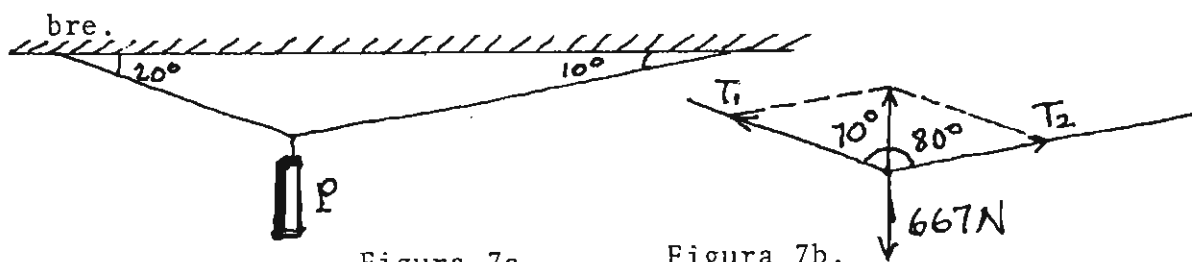


Figura 7a.

Figura 7b.

Para que el cuerpo de peso \vec{P} permanezca en su reposo, la suma de las fuerzas que los cables ejercen sobre el cuerpo deberá ser igual a $-\vec{P}$. Descomponiendo esta fuerza en la dirección de los cables se encontrará que $T_1 = 1314\text{ N}$ y $T_2 = 1254\text{ N}$.

Ejemplo 5. Dos fuerzas $P = 1000\text{N}$ y $Q = 1200\text{N}$ se aplican a una conexión la que se encuentra en equilibrio como se indica en la figura 8a. Determinar las tensiones T_1 y T_2 .

Consideremos a la conexión como un cuerpo puntual. El diagrama de cuerpo libre se indica en la figura.

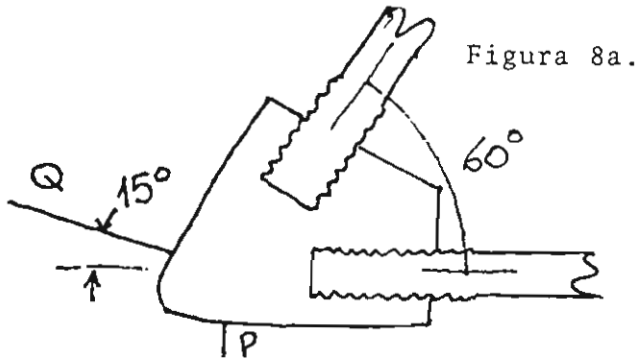


Figura 8a.

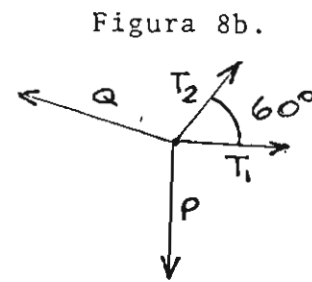


Figura 8b.

Apliquemos el método de componentes rectangulares. En forma tabular tendremos

	Módulo	θ_i	F_x	F_y
P	1000	270	0	-1000
Q	1200	165	-1159	+ 311
T_1	T_1	0	T_1	0
T_2	T_2	60	$0.5T_2$	$0.87T_2$
R	0		0	0

Puesto que el cuerpo está en reposo, la resultante deberá ser igual a cero. Es decir, la suma de los números que aparecen en la cuarta y en la quinta columna deberán ser iguales a cero:

$$0 - 1159 + T_1 + 0.5T_2 = 0$$

$$- 1000 + 311 + 0 + 0.87T_2 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones encontraremos: $T_2 = 792\text{N}$ y $T_1 = 763\text{N}$.

2.2 Problemas

En los problemas que siguen, todos los cuerpos se encuentran en reposo.

01. (Figura 01) Obtener gráficamente T_1 y T_2 .
02. a 05. (Figura 02 a 05) Obtener por trigonometría las tensiones T_1 y T_2 .
06. (Figura 06) Se suspende un bloque de 6 kN mediante dos cables. Determinar (a) el valor de α para que sea mínima la tensión en el cable AC y (b) los valores correspondientes de las tensiones en los cables AC y BC.
07. (Figura 07) Sabiendo que $P = 120$ N determinar (a) la tensión en los cables AC y BC y (b) el intervalo de valores de P para que los dos cables permanezcan tensionados.
08. (Figura 08) Para la configuración mostrada, determinar el valor de θ .
09. (Figura 09) Determinar F_1 y F_2 de modo que la partícula en O se encuentre en equilibrio.
10. (Figura 10) El collar A puede deslizarse libremente en la barra horizontal lisa. Determinar P tal que se mantenga en equilibrio si $c = 25$ cm.
11. (Figura 11) Una carga de 200 N es sostenida de diferentes maneras por cuerdas y poleas. Determinar, en cada caso, la tensión de la cuerda.

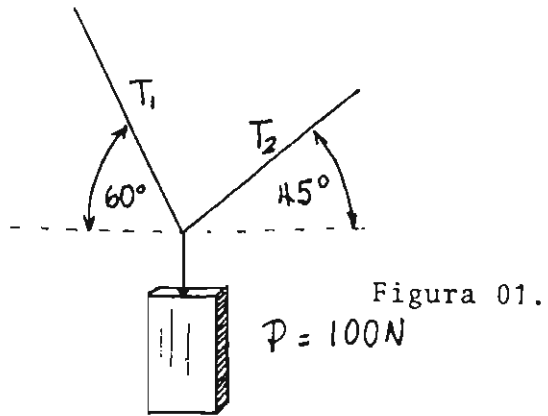


Figura 01.

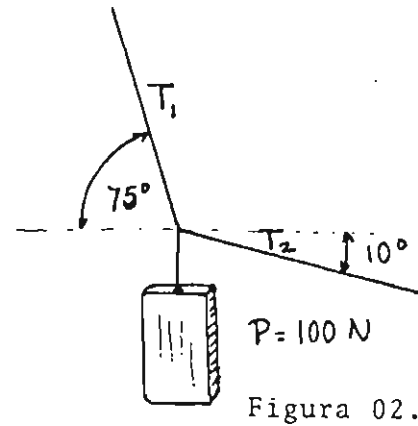


Figura 02.

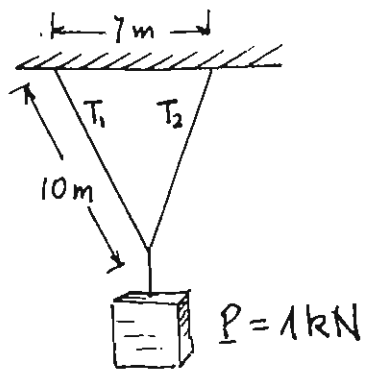


Figura 03.

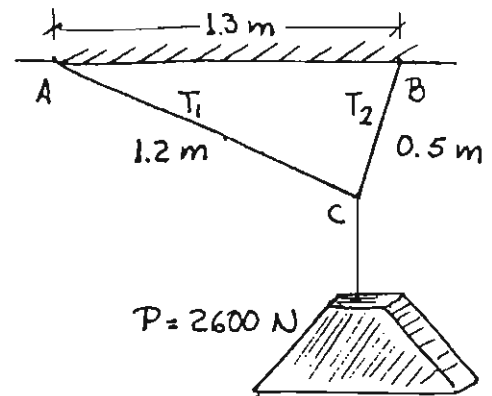


Figura 04.

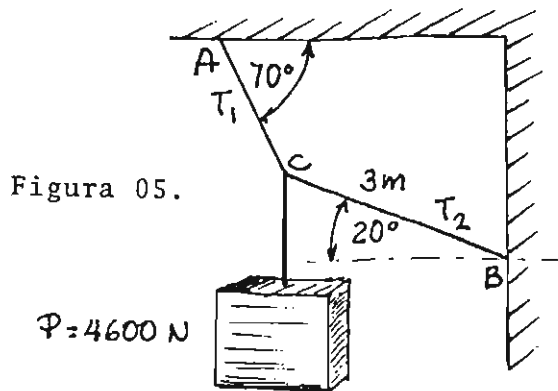


Figura 05.

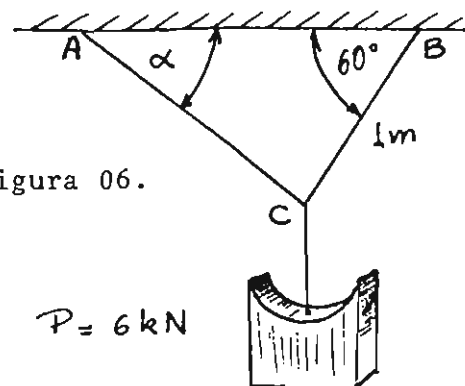


Figura 06.

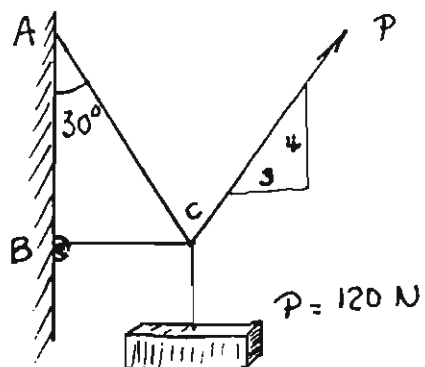


Figura 07.

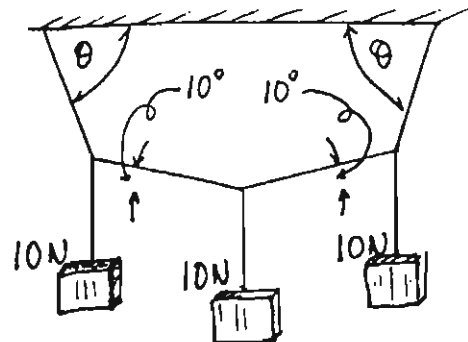


Figura 08.

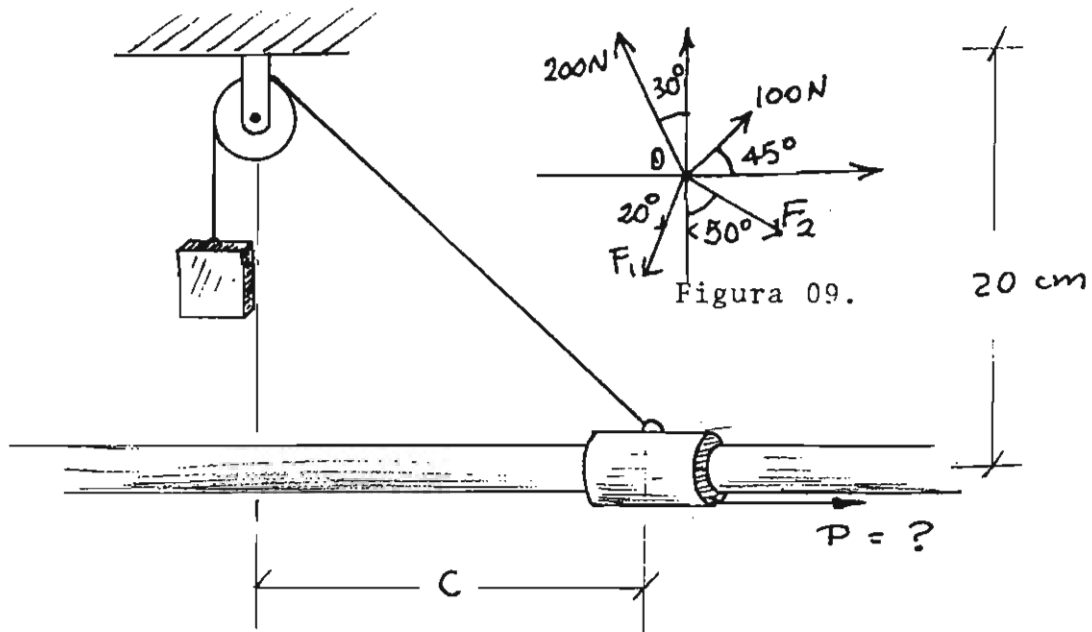


Figura 10.

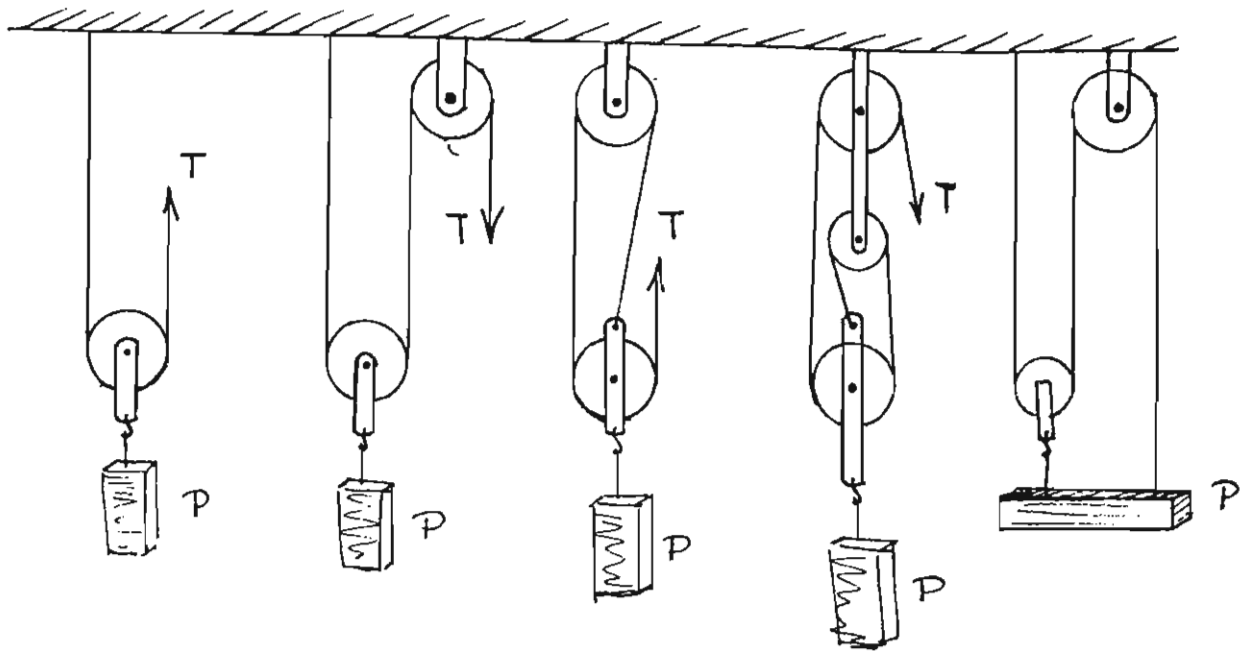


Figura 11.

UNIDAD 3: EQUILIBRIO DEL CUERPO RÍGIDO

3.1 Equilibrio del cuerpo rígido

3.2 Problemas

Preparó: Francisco Medina

Referencias:

D. Halliday y R. Resnick, Fundamentos de Física, CECSA, México, 1978. Capítulo 12.

JL Meriam, Estática, segunda edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1976. Capítulos 2 y 3.

3.1 Equilibrio del cuerpo rígido

1. Definir par y señalar cuál sea su efecto sobre un cuerpo rígido plano;
2. Definir momento de un par y establecer la condición de equilibrio;
3. Aplicar lo anterior al equilibrio de cuerpos rígidos.

1. Para que un cuerpo rígido pueda permanecer en reposo, la suma de las fuerzas aplicadas sobre él deberá ser igual a cero. De no ser así, su centro de masa empezará a moverse, en la forma establecida en la Unidad 1. Sin embargo, para que un cuerpo rígido permanezca en reposo no basta que la suma de fuerzas sea igual a cero.

Si $\vec{F}_1 = -\vec{F}_1'$, los discos de la figura 1 permanecerán en reposo

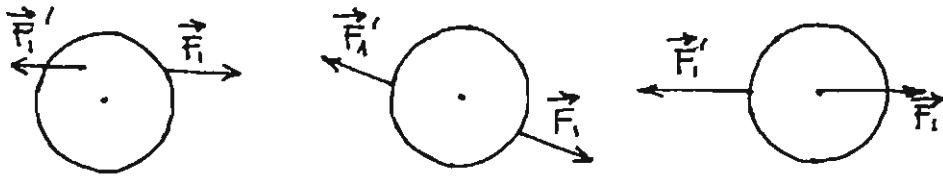


Figura 1

si se encuentran en reposo, puesto que las líneas de acción de las dos fuerzas coinciden. Los discos de la figura 2 no podrán permane

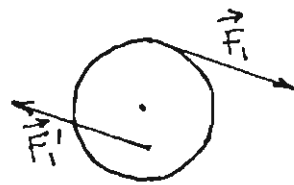


Figura 2a

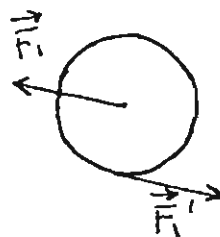


Figura 2b

cer en reposo, a pesar de que $\vec{F}_1 = -\vec{F}_1'$, puesto que las líneas de acción de las fuerzas no coinciden. En todos los casos, el centro

de masa permanecerá en reposo si se encontraba en reposo, puesto que la fuerza neta sobre el disco es igual a cero. Lo único que podrá hacer el disco es girar alrededor de su centro de masa. En el caso de la Figura 2a el disco girará en el sentido de las manecillas del reloj; en el caso de la figura 2b, girará en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Un sistema formado por dos fuerzas cualesquiera \vec{F} y \vec{F}' , tales que $\vec{F} = -\vec{F}'$, recibe el nombre de par y frecuente nos referiremos a éste como par \vec{F} . Al aplicar un par sobre un cuerpo, el movimiento de su centro de masa no se ve afectado, ya que la fuerza neta producida por el par es igual a cero. Sin embargo, bajo el influjo de este par, un disco inicialmente en reposo empezará a girar alrededor de su centro de masa.

2. Por ahora centraremos nuestra atención en la condición que deben satisfacer las fuerzas para que el disco, o cualquier cuerpo rígido plano, no gire alrededor de su centro de masa. Consideremos el disco de la figura 3a que está actuado por un par. Si ini

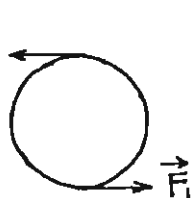


Figura 3a

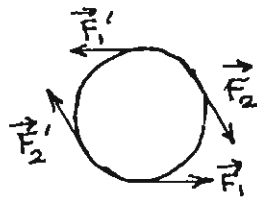


Figura 3b

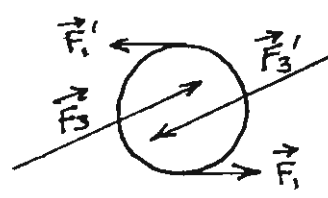


Figura 3c

cialmente se encuentra en reposo, será imposible mantenerlo en reposo mediante la aplicación de una fuerza única. La fuerza neta sería distinta de cero y su centro de masa empezaría a moverse. Entonces, para que el disco de la figura 3a no empiece a girar, sin que afecte el movimiento del centro de masa, deberá aplicársele

un par que lo haga girar en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, mediante el par \vec{F}_2 con $F_1 = F_2$.

Resulta que la forma indicada en la figura 3b no es la única para mantener el disco en reposo. Podemos también hacerlo con el par \vec{F}_3 como se ilustra en la figura 3c. Inmediatamente nos damos cuenta que F_3 deberá ser mayor que F_1 . Fácilmente podemos comprobar que el par deberá ser tanto mayor cuanto menor sea la distancia entre las líneas de acción de las fuerzas aplicadas.

Tenemos que acudir al laboratorio para efectuar el experimento apropiado. El efecto que produce el par \vec{F}_1 podrá ser cancelado por otro par \vec{F}_3 que haga girar al disco en sentido contrario al del par \vec{F}_1 ; la magnitud y distancia entre las fuerzas del par \vec{F}_3 deberá ser tal que $F_3 d_3 = F_1 d_1$.

Podemos entonces caracterizar un par \vec{F} por el producto Fd y por un signo, positivo o negativo. Será positivo cuando le imprima al disco un movimiento de rotación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj; negativo en el caso contrario.

Al producto Fd junto con el signo $+$ o $-$ se le denomina momento del par, y se le designa con el símbolo M . En las figuras 4 se tienen

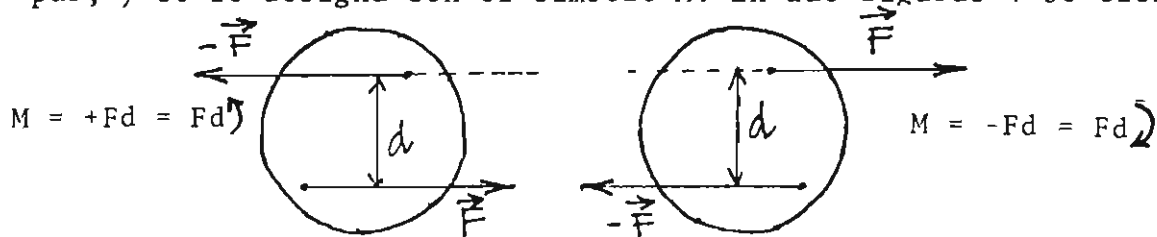


Figura 4.

dos ejemplos de pares aplicados sobre un disco. Al lado se indica el momento correspondiente en la notación que es de uso frecuente,

Supongamos un cuerpo plano sobre el que están aplicados varios pares de fuerza. La fuerza neta sobre el cuerpo es cero, puesto que cada par ejerce una fuerza neta igual a cero sobre el cuerpo. Se encuentra experimentalmente que la condición necesaria y suficiente para que el cuerpo permanezca en reposo es que la suma de los momentos de los pares sea igual a cero.

Ejemplo 1. (Figura 5) En los puntos C y C' de una placa se aplica un par. Determinar las fuerzas que deberán aplicarse en A y B en la direcciones AA' y BB' de modo que la placa permanezca en reposo.

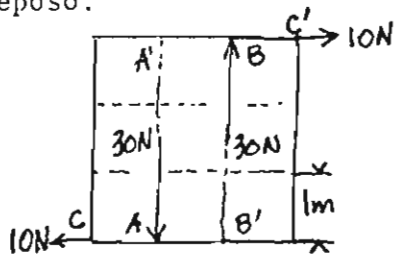


Figura 5

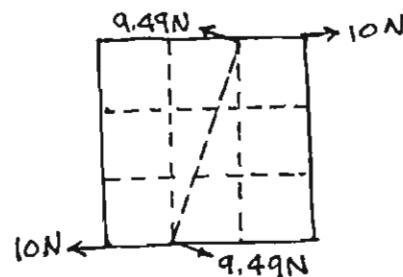


Figura 6

El momento del par aplicado será $(10\text{N})(3\text{m}) = 30\text{Nm}$, deberá ser cancelado por un par de momento 30Nm . Puesto que la distancia entre las rectas AA' y BB' es de 1m, la magnitud de las fuerzas aplicadas en A y en B será de $(30\text{Nm})/1\text{m} = 30\text{N}$. Para que el momento del par sea positivo, la fuerza en A deberá estar dirigida hacia abajo y la fuerza en B hacia arriba.

Ejemplo 2. (Figura 5) Se desea que la placa permanezca en reposo mediante dos fuerzas aplicadas en A y B de manera que la magnitud de éstas sea mínima.

Observemos que para un valor dado del momento del par, la magnitud de las fuerzas será tanto menor cuanto mayor sea la distancia en

tre sus líneas de acción. La distancia máxima que separará a las fuerzas del par es igual a la distancia entre A y B, que es igual a $\sqrt{10}\text{m} = 3.16\text{m}$. En este caso, las fuerzas deberán aplicarse en la dirección perpendicular a AB. Puesto que el momento de este par deberá ser igual a 30Nm , la magnitud de cada fuerza deberá ser igual a $(30\text{Nm})/(3.16\text{m}) = 9.49\text{N}$. La solución se muestra gráficamente en la figura 6.

Desde el punto de vista del equilibrio, lo que interesa de un par es el valor de su momento. En multitud de circunstancias difícilmente puede identificarse las fuerzas componentes del par y la distancia que las separa, aunque es sumamente sencillo especificar cuál es el momento del supuesto par que está actuando.

Ejemplo 3. (Figura 7) Sobre un disco que está unido rígidamente a un eje se aplican los pares indicados. Determinar el momento del par que el eje aplicará sobre el disco.

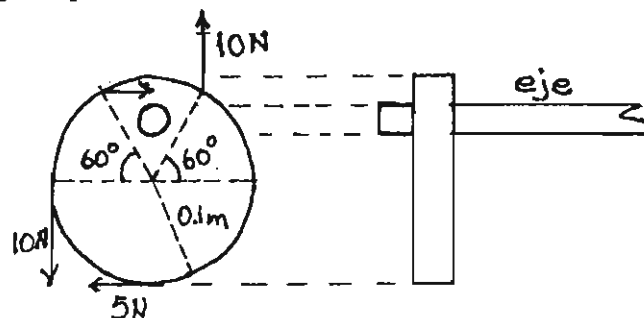


Figura 7

El momento del par 10N será $M_1 = (10\text{N})(0.10 + 0.10\cos 60^\circ) \text{ m} = 1.5\text{Nm}$. El momento del par 5N será $M_2 = (5\text{N})(0.10 + 0.10 \sin 60^\circ) \text{ m} = 0.9\text{Nm}$. El momento total aplicado por los dos pares será: $M = M_1 + M_2 = 1.5\text{Nm} + 0.9\text{Nm} = 0.6\text{Nm}$. Para que el disco esté en equilibrio, el par que el eje deberá aplicar sobre el disco será 0.6Nm . Debe observarse que el par aplicado por el disco sobre el eje deberá ser 0.6Nm .

3. Aplicaremos lo aprendido en esta Unidad y en la Unidad 2 a la solución de algunos problemas de equilibrio en cuerpos rígidos. Conviene hacer un resumen de las condiciones que rigen al equilibrio o, más bien, a la permanencia en reposo, de un cuerpo rígido. Supongamos que el centro de masa de un cuerpo rígido se encuentra en reposo, (i) la condición necesaria y suficiente para que el centro de masa de un cuerpo rígido permanezca en reposo es que la suma de todas las fuerzas aplicadas sea igual a cero.

Si la suma de las fuerzas es igual a cero, las fuerzas aplicadas sólo pueden formar pares. Si el centro de masa del cuerpo se encuentra en reposo, permanecerá en reposo. El único movimiento que podrá tener es el de girar alrededor del centro de masa. Supongamos que un cuerpo rígido no está girando alrededor de su centro de masa, (ii) la condición necesaria y suficiente para que un cuerpo no gire alrededor de su centro de masa es que la suma de los momentos de los pares sea igual a cero.

Es interesante observar que si se cumplen las condiciones enunciadas en (i) e (ii) podemos ignorar totalmente dónde se encuentra el centro de masa. Antes de terminar con esta sección, y después de adquirir cierta familiaridad con la aplicación de las condiciones anteriores a problemas relativos al reposo, trataremos algunos ejemplos en los que interviene el movimiento de cuerpos rígidos en un plano.

Ejemplo 4. (Figura 8a) Una placa rectangular puede girar libremente en el punto fijo A y se encuentra simplemente apoyada en el punto B. En el punto C se le aplica una fuerza. ¿Cuáles deberán ser las reacciones en los puntos A y B para que la placa permanezca en reposo?

La formulación del problema puede ser oscura por el desconocimiento de los términos que se han empleado.

Que la placa pueda girar libremente alrededor del punto A quiere decir que impide cualquier movimiento de traslación, solamente permite un giro sin producir par alguno. Se le llama apoyo articular. Que la placa esté simplemente apoyada en B quiere decir que la única fuerza posible que puede producirse en B es una fuerza vertical hacia arriba. El cuerpo podrá trasladarse horizontalmente. La reacción en A podrá tener componentes vertical y horizontal mientras que la reacción en B sólo tendrá una componente vertical. En la figura 8b se ilustra el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

La fuerza aplicada en el punto C sólo podrá cancelarse por una fuerza aplicada en A horizontalmente: $F_{Ax} = -10\text{N}$. Con esto se logra que la suma de las fuerzas sobre la placa sea igual a cero. Pero las fuerzas F_{Ax} y F producen un par cuyo momento es $(10\text{N})(2\text{m}) = 20\text{Nm}$. Este par podrá cancelarse por un par aplicado en los puntos A y B cuyo momento sea $+20\text{Nm}$. Esto implica que la fuerza vertical en B esté dirigida hacia arriba, mientras que la fuerza A esté dirigida hacia abajo. La magnitud de cada fuerza del par será $(20\text{Nm})/(4\text{m}) = 5\text{N}$. Así, $F_{Ay} = -5\text{N}$ y $F_{By} = +5\text{N}$.

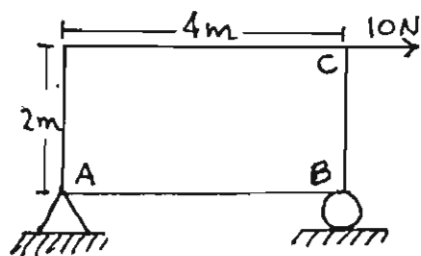


Figura 8a

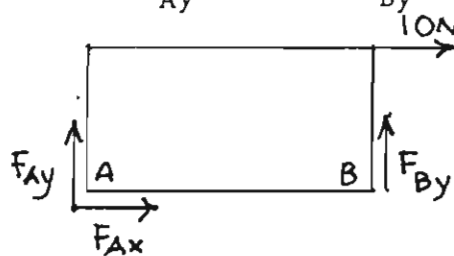
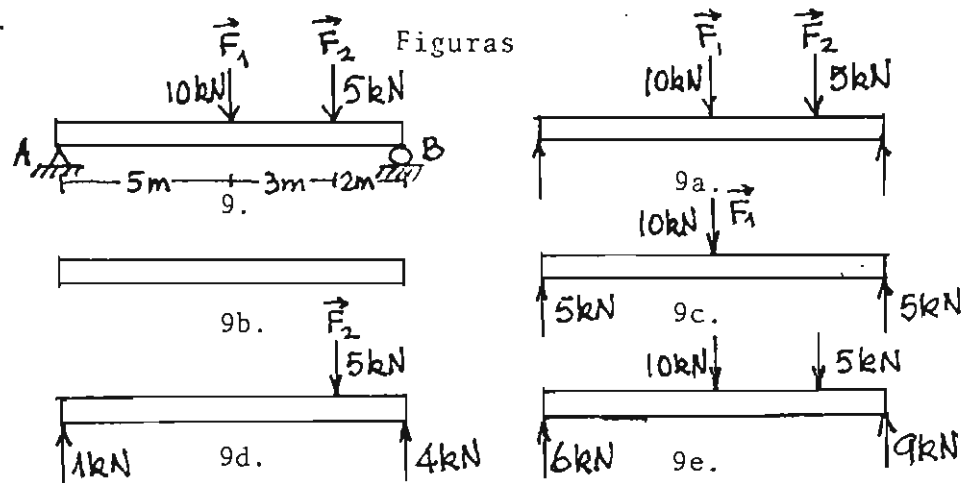


Figura 8b

Ejemplo 5. (Figura 9) Una viga está cargada como se indica. Hallar las reacciones del apoyo articular en A y del apoyo simple en B.



En la figura 9a se tiene el diagrama de cuerpo libre de la viga. Resolveremos el problema por etapas, teniendo inicialmente la viga en reposo y sin cargas, como se ilustra en la figura 9b. Consideraremos primero las reacciones en los apoyos cuando sólo se aplica la fuerza F_1 ; después las reacciones cuando sólo se aplica la fuerza F_2 ; la solución al problema estará dada por la superposición de las operaciones anteriores, o sea, la reacción de los apoyos será igual a la suma de las reacciones que producen para cada una de las cargas aplicadas por separado.

Al colocar la fuerza F_1 sobre la viga, los apoyos deberán proporcionar las reacciones suficientes para que el centro de masa de la viga permanezca en reposo. Esto se logra, por ejemplo, haciendo que el apoyo en A aplique una fuerza de $10\text{ kN}\uparrow$, donde la flecha \uparrow indica que la fuerza es vertical y está dirigida hacia arriba. Si solamente actuaran estas dos fuerzas que forman un par, la viga giraría alrededor de su centro de masa en el sentido de

las manecillas del reloj. El momento del par resulta ser de $(10\text{kN})(5\text{m}) \curvearrowright = 50\text{kNm} \curvearrowright$. Los apoyos en A y en B deben proporcionar la fuerza suficiente para cancelar el efecto de este par. Esto sólo se puede hacer si el apoyo en A ejerce una fuerza de $5\text{kN} \downarrow$ y el apoyo en B una fuerza $5\text{kN} \uparrow$; el momento de este par sería $50\text{kNm} \curvearrowleft$, que cancelaría al momento del par \vec{F}_1 . Después de estas operaciones se tendrá la siguiente situación: fuerza producida por el apoyo en

$$A: 10\text{kN} \uparrow + 5\text{kN} \downarrow = 5\text{kN} \uparrow \quad B: 0\text{kN} + 5\text{kN} \uparrow = 5\text{kN} \uparrow$$

El diagrama de cuerpo libre está dado en la figura 9c.

Consideremos ahora el equilibrio de la viga cuando solamente actúa \vec{F}_2 . Para cancelar esta fuerza podemos aplicar, por ejemplo, una fuerza de $5\text{kN} \uparrow$ en el apoyo B. Esto producirá un par sobre la viga con un momento igual a $(5\text{kN})(2\text{m}) \curvearrowleft = 10\text{kNm} \curvearrowleft$. Habrá que cancelar este momento colocando un par aplicado en A y B. El módulo de cada fuerza del par sería $(10\text{kNm})/(10\text{m}) = 1\text{kN}$. Entonces el apoyo en A una fuerza de $1\text{kN} \uparrow$ y el apoyo en B una fuerza de $1\text{kN} \downarrow$.

Así, la fuerza producida por el apoyo en

$$A: 0\text{kN} + 1\text{kN} \uparrow = 1\text{kN} \uparrow \quad B: 5\text{kN} \uparrow + 1\text{kN} \downarrow = 4\text{kN} \uparrow$$

El diagrama de cuerpo libre está dado en la figura 9d. Cuando se aplican simultáneamente \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , habrá que sumar las reacciones que ejercen los apoyos cuando se aplica cada fuerza por separado.

Presentamos los resultados en forma tabular.

Cargas		Reacción en	
		A	B
F_1	$10\text{kN} \downarrow$	$5\text{kN} \uparrow$	$5\text{kN} \uparrow$
F_2	$5\text{kN} \downarrow$	$1\text{kN} \uparrow$	$4\text{kN} \uparrow$
$F_1 + F_2$	$15\text{kN} \downarrow$	$6\text{kN} \uparrow$	$9\text{kN} \uparrow$

Ejemplo 6. (Figura 11a) Se sabe que la magnitud de la fuerza vertical P es de 400N. Determinar (a) la tensión en el cable CD y (b) la reacción en B.

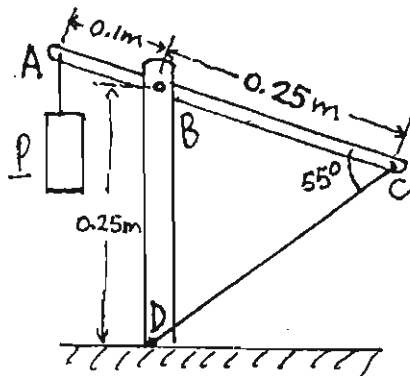


Figura 11a

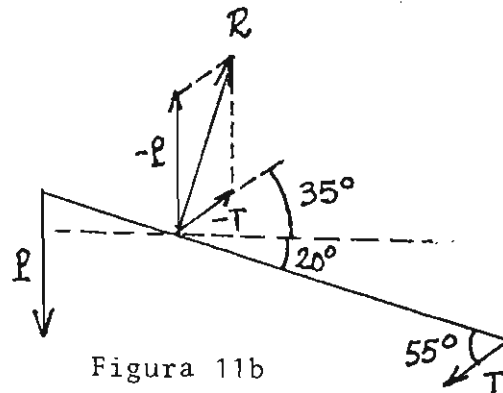


Figura 11b

En la figura 11b se muestra el diagrama de cuerpo libre. Consideremos el efecto correspondiente a \vec{P} y \vec{T} por separado. Para cancelar la fuerza \vec{P} , el apoyo en B deberá ejercer una fuerza $-\vec{P}$ sobre la barra. El momento del par \vec{P} es igual a $(400\text{N})(0.1 \cos 20^\circ)\text{m} = 37.6 \text{ Nm}$. Para cancelar la tensión \vec{T} , el apoyo en B deberá ejercer una fuerza $-\vec{T}$ sobre la barra. El momento del par \vec{T} es igual a $T(0.25 \cos 35^\circ)\text{m} = 0.20T \text{ m}$. Las unidades de fuerza están incluidas en T. Puesto que la suma de los momentos de los dos pares debe ser igual a cero, $+37.6 \text{ Nm} + 0.20T \text{ m} = 0$, $\therefore T = (37.6/0.20)\text{N} = 188\text{N}$.

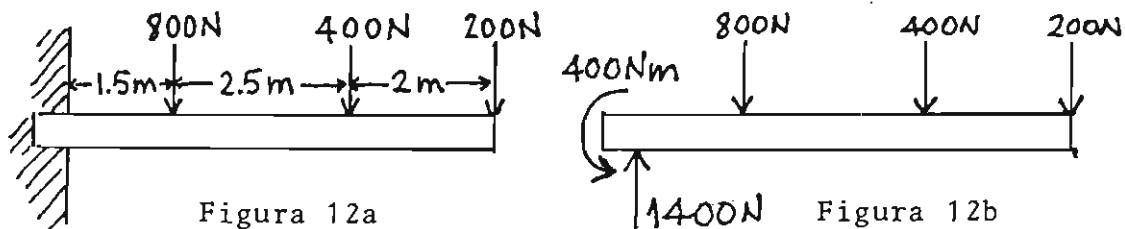
Las componentes rectangulares de la suma de las reacciones $-\vec{P}$ y $-\vec{T}$ son:

$$R_{Bx} = T \cos 35^\circ = 154\text{N}, \quad R_{By} = 400 + T \sin 35^\circ = 507\text{N},$$

o bien, $R = 530 \text{ N}$, $\angle 73.1^\circ$

Ejemplo 7. (Figura 12a) Una viga en voladizo está cargada como se indica. Determinar la reacción en el empotramiento.

En la figura 12b se muestra el diagrama del cuerpo libre.



El apoyo tendrá que ejercer una fuerza de $(800 + 400 + 200)\text{N} = 1400\text{N}$ para cancelar las tres fuerzas aplicadas. Puesto que deben formarse tres pares, uno por cada fuerza aplicada, la suma de los momentos de los pares es de $[(800)(1.5)] + (400)(4) + (200)(6)]\text{Nm} = 400\text{Nm}$. Entonces, el apoyo deberá proporcionar un momento de 400Nm . Este momento se genera en el empotramiento por una distribución de fuerzas cuya suma deberá ser igual a cero.

Puesto que las fuerzas aplicadas no tienen ninguna componente horizontal, la componente horizontal de la reacción en el empotramiento deberá ser igual a cero. En suma, la reacción en el empotramiento será

$$R_x = 0\text{N}, \quad R_y = +1400\text{N}, \quad M = +400\text{Nm}.$$

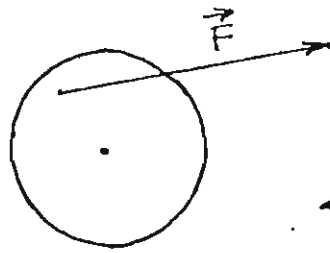


Figura 13a

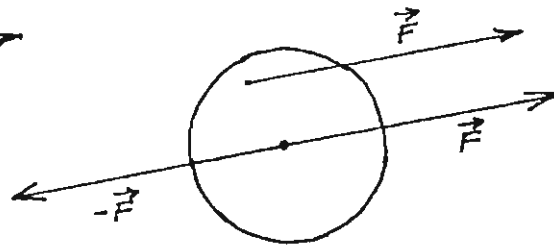


Figura 13b

Consideremos finalmente el caso de un disco que se encuentra inicialmente en reposo y se le aplica una sola fuerza \vec{F} , como se ilustra en la figura 13a. Puesto que la fuerza neta es \vec{F} , el disco no permanecerá en reposo. Podemos sustituir esta fuerza por una fuerza aplicada en el centro de masa y un par, como se indica en la figura 13b. El movimiento del centro de masa estará determinado por la fuerza \vec{F} , y el giro del disco por el momento del par \vec{F} . En el curso de Dinámica se analizará con detalle este problema.

3.2 Problemas

01. (Figura 01) Sobre una placa articulada en A y simplemente apoyada en B, se aplican las cargas $Q_1 = 400\text{N}$ y $Q_2 = 100\text{N}$. (a) Elaborar un diagrama de cuerpo libre de la placa y (b) hallar las reacciones en los apoyos A y B.

02. (Figura 02) Determinar la magnitud y el punto de aplicación de una fuerza que permite permanecer en reposo a la viga ilustrada en la figura.

03. (Figura 03) Una fuerza de 150N se aplica a la palanca de control A. Sabiendo que la distancia AB es de 250 mm , calcular (a) la reacción en B y (b) el momento que deberá aplicarse en B para que la palanca se halle en reposo.

04. (Figura 04) Un taladro múltiple se usa para abrir simultáneamente seis orificios en la placa de acero. Cada broca ejerce un par de momento igual a 4.4Nm en el sentido de las manecillas del reloj. Determinar un par equivalente formado por fuerzas del mínimo valor que actúen (a) en A y C, (b) en A y D, (c) sobre la placa.

05. (Figura 05) Una escalera se apoya sin rozamiento en una pared. El extremo inferior descansa sobre el piso áspero. Determinar las reacciones en los dos extremos.

06. (Figura 06) Una escalera de las dimensiones indicadas se encuentra apoyada sin fricción sobre el piso. El peso P está producido por un hombre. Hallar (a) la tensión en la barra transversal BD y (b) las fuerzas ejercidas por el suelo sobre la escalera.

07. (Figura 07) Una barra delgada horizontal AB de peso despreciable y longitud L está sujeta con pernos a una pared vertical en A y soportada en B por un alambre delgado BC que forma un ángulo con la horizontal. Un peso P puede moverse por toda la barra quedando definida su posición por la distancia x a la pared. Encontrar (a) la fuerza de tensión T en el alambre en función de x y (b) las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la barra sobre el perno en A.

08.(Figura 08) Reemplazar las fuerzas y el par por una sola fuerza aplicada en el punto localizado (a) sobre la línea AB, (b) sobre la CD. En cada caso, determinar la distancia desde el centro O al punto de aplicación de la fuerza.

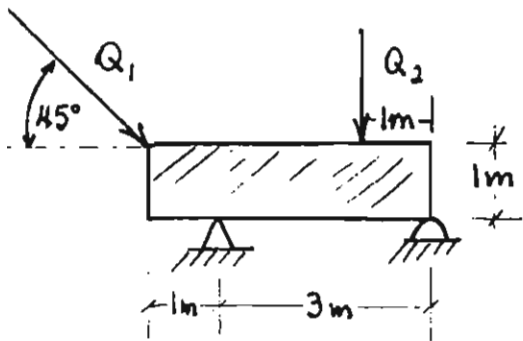


Figura 01.

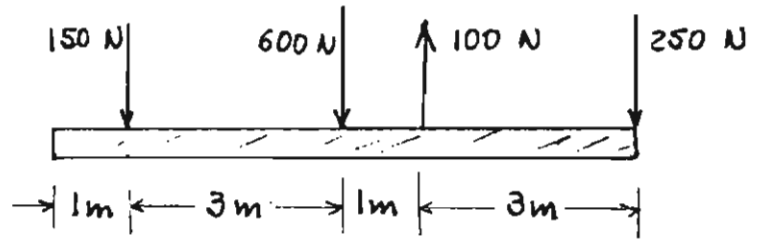


Figura 02.

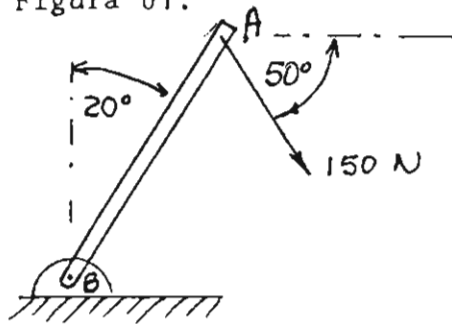


Figura 03.

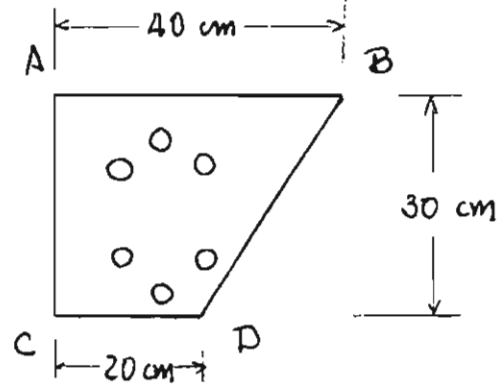


Figura 04.

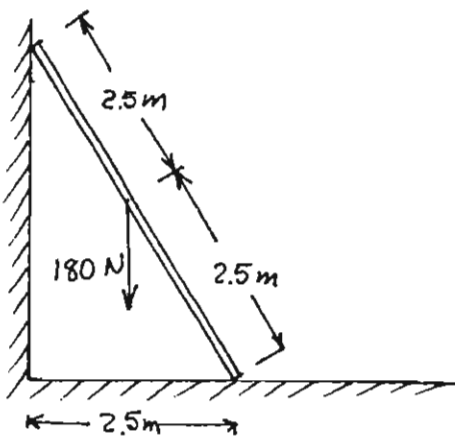


Figura 05.

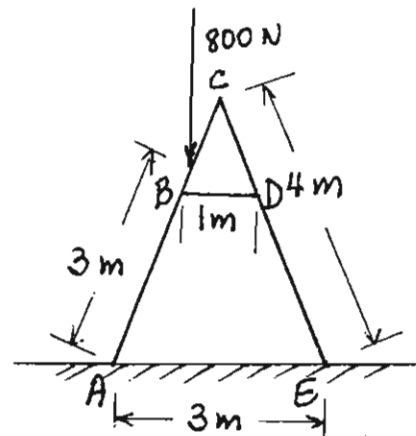


Figura 06.

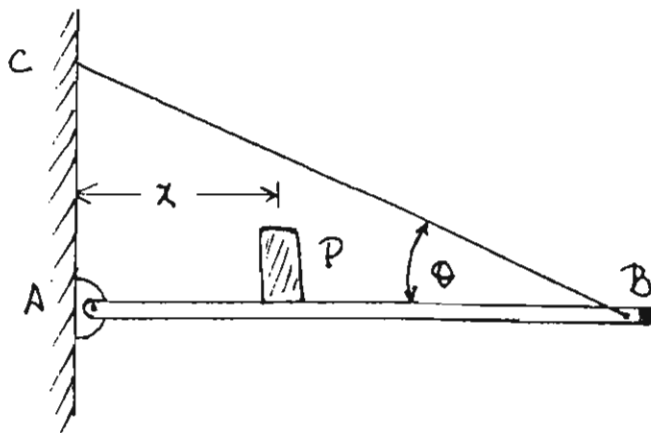


Figura 07.

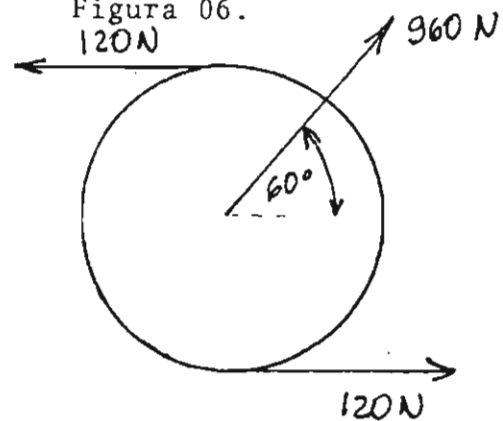


Figura 08.

UNIDAD 4: FUERZAS DE FRICCIÓN Y ELÁSTICA

4.1 Fuerza de fricción

4.2 Fuerza elástica

4.3 Problemas

Preparó: Francisco Medina

La parte de fricción es la sección 5 - 12 del Halliday y Resnick; la parte de fuerza elástica es una selección de los Capítulos 2 y 5 del Crandall et al.

D.Halliday y R.Resnick, Fundamentos de Física, CECSA, México, 1978, Sección 5 - 12.

SH Crandall, NC Dahl y TJ Lardner, An Introduction to the Mechanics of Solids, segunda edición, Mc Graw - Hill Kogakusha, Tokyo, 1972. Capítulos 2 y 5.

4.1 Fuerza de fricción

1. Definir la fuerza de fricción y los coeficientes estático y cinético de fricción.
2. Resolver problemas de equilibrio donde intervengan fuerzas de fricción en superficies planas.

1. Vamos ahora a considerar las fuerzas llamadas friccionales. Como existe una ley sencilla y relativamente general que describe muchas fuerzas de fricción, podemos resolver muchos problemas sin tener necesariamente que comprender el origen de dichas fuerzas de fricción. Sin embargo, antes de considerar las aplicaciones de la ley de las fuerzas de fricción, vamos a exponer brevemente algunas ideas relativas al origen y naturaleza de dichas fuerzas. Si proyectamos un bloque de masa m con una velocidad inicial \vec{v}_0 a lo largo de una mesa horizontal, acabará necesariamente por detenerse. Esto significa que mientras se está moviendo, experimenta una fuerza que está dirigida en sentido opuesto al de su velocidad. En este caso decimos que la mesa ejerce una fuerza de fricción sobre el bloque que se desliza.

En realidad, siempre que la superficie de un cuerpo se deslice sobre la de otro, cada cuerpo ejercerá una fuerza de fricción sobre el otro, fuerza que es paralela a la superficie. La fuerza de fricción que se ejerce sobre cada uno de los dos cuerpos está en sentido opuesto al de su movimiento respecto al otro. Aun cuando no se produzca un movimiento relativo, existen siempre fuerzas de fricción entre ambas superficies.

Aunque hasta ahora hemos ignorado los efectos de la fricción, esta fuerza es muy importante en nuestra vida diaria. Por sí sola,

esta fuerza hace que se detenga toda rueda que éste girando. Por otra parte, sin la fricción no podríamos caminar como lo hacemos, no seríamos capaces de mantener un lápiz en nuestra mano y aun si lo hiciéramos, no podríamos escribir con él; el transporte rodante como lo conocemos, no sería posible.

Queremos saber cómo poder expresar las fuerzas de fricción en términos de las propiedades de los cuerpos y de sus medios ambientes. Es decir, queremos saber cuál es la ley de la fuerza para estas fuerzas de fricción. En lo sucesivo vamos a considerar el deslizamiento (sin rodar) de una superficie seca (sin lubricar) sobre la otra. Como veremos más adelante, la fricción, desde el punto de vista microscópico, es un fenómeno muy complicado y las leyes de la fuerza de la fricción por deslizamiento en seco son de carácter empírico y solamente aproximadas en sus predicciones. No tienen la elegante sencillez y precisión que encontraremos para la ley de la fuerza gravitacional ni para ley de la fuerza electrostática. Sin embargo, es notable, si consideramos la enorme diversidad de superficies que podemos encontrar, que muchos aspectos del comportamiento de fricción pueden entenderse cualitativamente basándose en unos pocos y sencillos mecanismos.

Consideremos un bloque que está en reposo sobre un mesa horizontal como se muestra en la figura 1. Fijemos a él un resorte que mida la fuerza necesaria para ponerlo en movimiento. Encontramos que el bloque no se moverá cuando le apliquemos una pequeña fuerza. Decimos entonces que esta fuerza que le hemos aplicado está balanceada por una fuerza de fricción opuesta, ejercida sobre el bloque por la mesa y que actúa en la superficie de contacto. Si

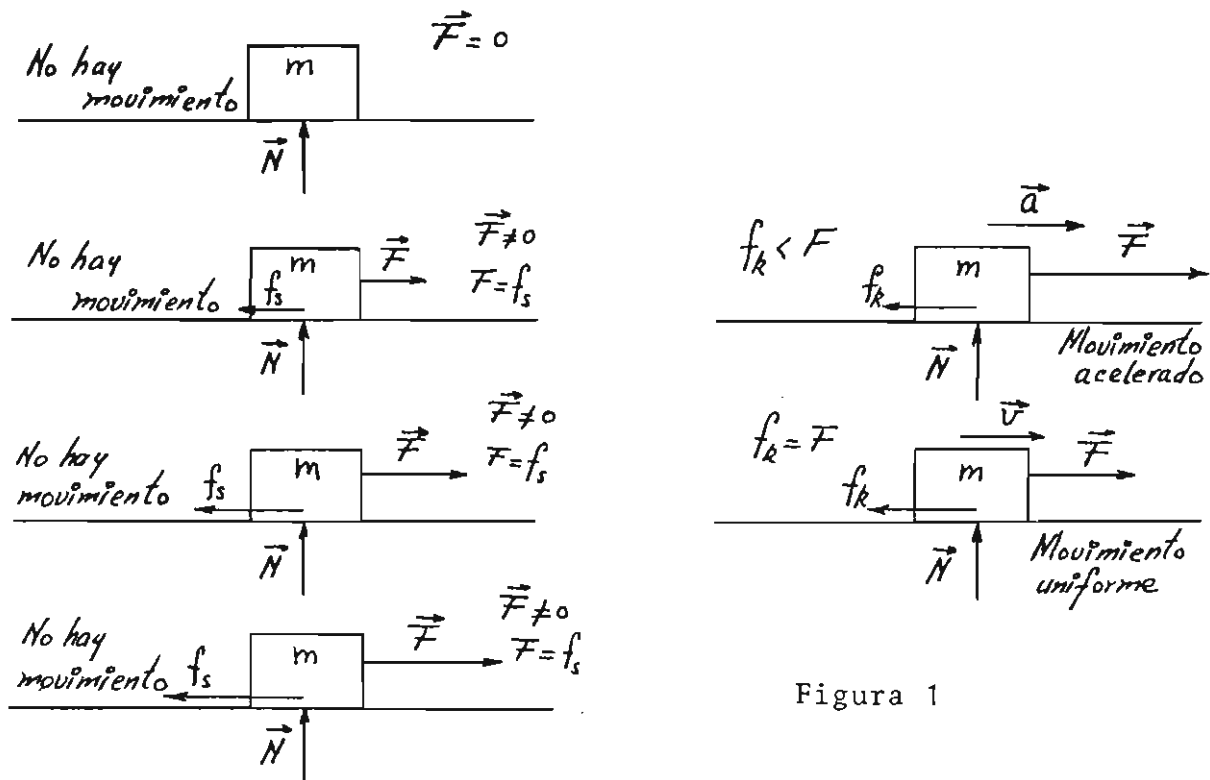


Figura 1

aumentamos la fuerza aplicada, encontraremos un determinado valor de dicha fuerza para el cual el bloque justamente empieza a moverse. Una vez que el movimiento ha comenzado, esta misma fuerza produce un movimiento acelerado. Si una vez que ha comenzado el movimiento reducimos la fuerza, encontramos que es posible conservar al bloque en movimiento uniforme, es decir, sin aceleración; esta fuerza puede ser pequeña pero nunca será nula.

Las fuerzas de fricción que actúan entre superficies que están en reposo entre sí, se llaman fuerzas de fricción estática. La fuerza de fricción estática máxima será precisamente del mismo valor que la menor fuerza necesaria para iniciar el movimiento. Una vez que éste ha comenzado, las fuerzas de fricción que actúan entre las superficies decrecen generalmente, de modo que para conservar el movimiento uniforme es solamente necesaria una fuerza menor. La

fuerza que actúa entre las superficies que están en movimiento relativo entre sí, se llaman fuerzas de fricción cinética.

La fuerza máxima de fricción estática entre cualquier par de superficies secas y no lubricadas se rige por estas dos leyes empíricas. (1) Dentro de amplios límites es aproximadamente independiente del área de contacto y (2) es proporcional a la fuerza normal. Esta fuerza normal, que algunas veces se llama la carga, es aquella que cada cuerpo ejerce sobre el otro, perpendicularmente a la cara de contacto mutuo. Se produce por la deformación elástica de los cuerpos que están en contacto, ya que dichos cuerpos, en realidad, no son nunca completamente rígidos. Para un bloque que descansa sobre una mesa horizontal que se desliza sobre ella, la fuerza normal es igual en magnitud al peso del bloque. La mesa debe ejercer sobre aquél una fuerza dirigida hacia arriba y que sea igual en magnitud a la fuerza que hacia abajo ejerce la Tierra sobre el bloque, es decir, a su peso.

La relación entre la magnitud de la fuerza máxima de fricción estática y la magnitud de la fuerza normal se llama el coeficiente de fricción estática para las superficies de que se trata. Si f_s representa la magnitud de la fuerza de fricción estática, podemos escribir que

$$f_s \leq \mu_s N, \quad (1)$$

donde μ_s es el coeficiente de fricción estática y N la magnitud de la fuerza normal. El signo igual solamente vale cuando f_s tiene un valor máximo.

La fuerza de fricción cinética f_k entre superficies secas, no lu

bricadas, sigue las mismas dos leyes de la fricción estática. (1) Dentro de amplios límites es independiente aproximadamente del área de contacto y (2) es proporcional a la fuerza normal. La fuerza de fricción cinética es también bastante independiente de la velocidad relativa con que las superficies se muevan entre sí. La relación de la magnitud de la fuerza de fricción cinética a la magnitud de la fuerza normal se llama el coeficiente de fricción cinética. Si f_k representa la magnitud de la fuerza de fricción

$$f_k = \mu_k N, \quad (2)$$

donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética.

Tanto μ_s como μ_k son constantes adimensionales, puesto que ambos son relaciones entre (las magnitudes de) dos fuerzas. Generalmente para un par de superficies dadas, $\mu_s > \mu_k$. Los valores reales de μ_s y de μ_k dependen de la naturaleza de ambas superficies en contacto. μ_s y μ_k pueden ser mayores que la unidad, aunque por lo general nunca la exceden. Nótese que las ecuaciones 1 y 2 son relaciones únicamente entre las magnitudes de las fuerzas normales y de fricción. Estas fuerzas están siempre dirigidas perpendicularmente entre sí.

En la escala atómica, aun la superficie más finamente pulida está lejos de ser plana. Cuando dos cuerpos se colocan en contacto, el área real microscópica de contacto es mucho menor que el área de contacto aparente macroscópica. En algún caso particular, estas áreas pueden muy bien estar en la relación de 1 a 10^4 .

La superficie real (microscópica) de contacto es proporcional a la fuerza normal, porque los puntos de contacto se deforman plásticamente.

mente bajo los grandes esfuerzos que sobre ellos se desarrollan. El área de contacto real permanece siendo la misma aún cuando el área de contacto aparente se reduzca a causa de que al aumentar la fuerza normal por unidad de área real, se produce una subsiguiente deformación plástica. Muchos de los puntos de contacto llegan realmente a estar "soldados en frío" entre sí. Este fenómeno, llamado adherencia superficial, se debe a que en los puntos de contacto, las moléculas de los lados opuestos de ambas superficies están tan cercanas entre sí, que ejercen intensas fuerzas intermoleculares unas sobre las otras. Cuando se hace deslizar un cuerpo sobre otro, la resistencia de fricción es debida a la ruptura de estos miles de pequeñas soldaduras, que se vuelven a formar al ocurrir nuevos contactos casuales.

El coeficiente de fricción depende de muchas variables, tales como la naturaleza de los materiales, el acabado de las superficies, las películas superficiales, la temperatura y el grado de contaminación. Por ejemplo, si dos superficies de metal, cuidadosamente limpiadas, se colocan en una cámara de alto vacío de modo que no se formen películas superficiales de óxido, el coeficiente de fricción aumenta hasta llegar a tener valores enormes y las superficies llegan realmente a estar firmemente "soldadas" entre sí. Si se deja entrar una pequeña cantidad de aire en la cámara de tal manera que se formen películas de óxido en las superficies opuestas, el coeficiente de fricción se reduce hasta su valor "normal". La fuerza de fricción que opone un cuerpo que rueda sobre otro es mucho menor que la del movimiento de deslizamiento y ésta es precisamente la causa de la ventaja de la rueda sobre el trineo. Esta

fricción reducida es debida, en gran parte, al hecho de que en el rodamiento, las soldaduras de contacto microscópico son más bien "peladas" que "resurada" como ocurre en la fricción por deslizamiento. Este hecho puede reducir la fuerza de fricción hasta unas mil veces.

2. Consideraremos dos ejemplos para ilustrar el efecto de la fuerza de fricción en situaciones de equilibrio.

Ejemplo 1. (Figura 2a) Consideremos una escalera apoyada en el piso, donde el coeficiente de fricción es 0.5, y en la pared, donde no hay fricción. Encontrar cuál es la altura máxima h que podrá subir un hombre que pesa 1000N sin que la escalera se derrumbe. La escalera tiene un peso despreciable en comparación con el peso del hombre.

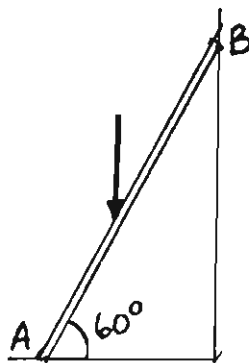


Figura 2a

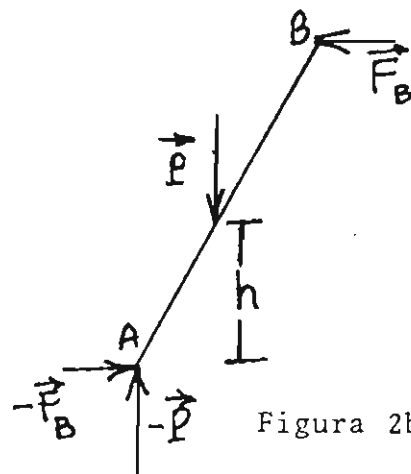


Figura 2b

En la figura 2b se muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema formado por el hombre y la escalera. Puesto que no hay fuerza de fricción, la fuerza \vec{F}_B que la pared ejerce sobre la escalera deberá ser horizontal. El piso podrá ejercer una fuerza tanto ho

horizontal, debido a la fuerza de fricción, como vertical. Para que el sistema pueda encontrarse en reposo, el piso deberá ejercer una fuerza vertical \vec{P} para cancelar el peso del hombre, y una fuerza horizontal \vec{F}_B para cancelar la fuerza que la pared ejerce sobre la escalera. Al aumentar h , aumenta el momento del par \vec{P} , el cual deberá cancelarse con el momento del par \vec{F}_B . El máximo valor que puede tener el momento de este par corresponde al máximo valor que puede tener \vec{F}_B , que es igual a $P\mu_s$. Cuando la escalera está a punto de derrumbarse, deberá tenerse que

$$P\mu_s L \sin 60^\circ - Ph/\tan 60^\circ = 0$$

$$h = L\mu_s \sin 60^\circ \tan 60^\circ = 3 \times 0.5 \times \sin 60^\circ \tan 60^\circ = 2.25\text{m},$$

resultado que no depende del peso del hombre.

¿Cuál sería el resultado si se tomara en cuenta el peso W de la escalera, suponiendo que es una fuerza aplicada en el centro de ella?

Ejemplo 2. (Figura 3a) Determinar el intervalo de valores del peso del cuerpo B de manera que el cuerpo A no pueda deslizarse. El peso del cuerpo A es de 1000N y el coeficiente de fricción estático entre éste y el plano es de $\mu_s = 0.3$

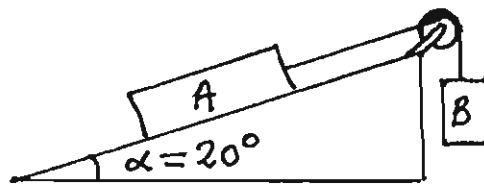


Figura 3a.

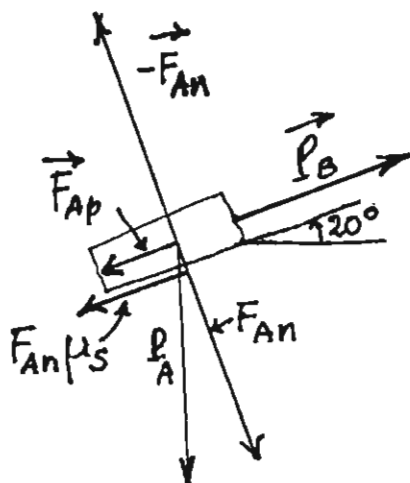


Figura 3b.

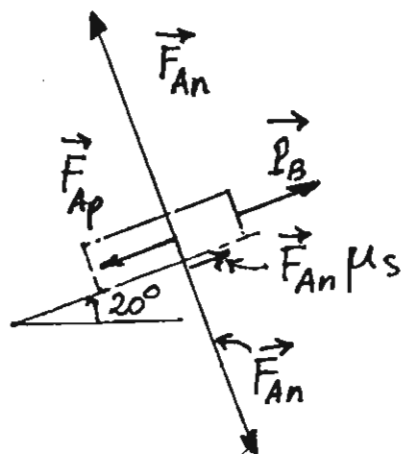


Figura 3c.

En la figura 3b se muestra el diagrama de cuerpo libre de A cuando éste se encuentra a punto de deslizarse hacia arriba. En este caso la fuerza de fricción tiene su valor máximo, $F_{An}\mu_s$. Las fuerzas en la dirección paralela al plano deberán cancelarse:

$$P_B - \mu_s P_A \cos \alpha - P_A \sin \alpha = 0$$

$$P_B = P_A (\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$= 1000(0.3 \cos 20^\circ + \sin 20^\circ) = 624 \text{ N.}$$

Si el peso del cuerpo B es mayor que 624N el cuerpo A se deslizará hacia arriba. Obtenemos una primera condición $P_B \leq 624 \text{ N}$.

En la figura 3c se muestra el diagrama de cuerpo libre de A cuando éste se encuentra a punto de deslizarse hacia abajo. En este caso, la fuerza de fricción tiene su máximo valor, $\mu_s F_{An}$, y las fuerzas en la dirección paralela al plano deberán cancelarse:

$$P_B + \mu_s P_A \cos \alpha - P_A \sin \alpha = 0$$

$$\begin{aligned}
 P_B &= P_A (\sin 20^\circ - \mu_s \cos 20^\circ) \\
 &= 1000(\sin 20^\circ - 0.3 \cos 20^\circ) \\
 &= 6N.
 \end{aligned}$$

Si el peso del cuerpo B es menor que 6N, el cuerpo A se deslizará hacia abajo. Entonces, el intervalo de valores pedido estará dado por

$$6N \leq P_B \leq 624N.$$

4.2 Fuerza elástica

1. Establecer la ley de Hooke para el cuerpo deformable bidimensional sometido a esfuerzos normales.
2. Estudiar el diagrama esfuerzo-deformación para materiales dúctiles y para materiales frágiles.
3. Resolver problemas de equilibrio donde intervengan fuerzas elásticas.

1. El tipo básico de deformación que más frecuentemente se presenta se muestra en la figura 1. Una barra está sometida a dos fuerzas y nos interesa el movimiento relativo de los puntos de aplicación de las dos fuerzas. Consideremos la deformación en las tres barras hechas de idéntico material, aunque de longitudes y secciones transversales diferentes. Supongamos que en cada barra la fuerza se aumenta gradualmente desde cero y se mide la elongación δ producida para diferentes valores de la carga. Si la elongación máxima es muy pequeña (por ejemplo, no mayor del 0.10% de la longitud original), entonces para la mayor parte de los materiales el resultado de estas tres pruebas estará dado por gráfi

cos como los de la figura 2a o la figura 2b. Las posiciones relativas de las tres curvas en cada gráfico es lo que podríamos esperar de la experiencia que tenemos con cuerpos fácilmente deformables, como lo son las bandas de hule.

Se elabora un gráfico de los resultados anteriores, teniendo como abscisa la elongación entre la longitud original y como ordenada la carga sobre el área. Los resultados experimentales con las tres barras pueden representarse mediante una curva única como se muestra en las figuras 3a y 3b. El hecho de que en este diagrama con

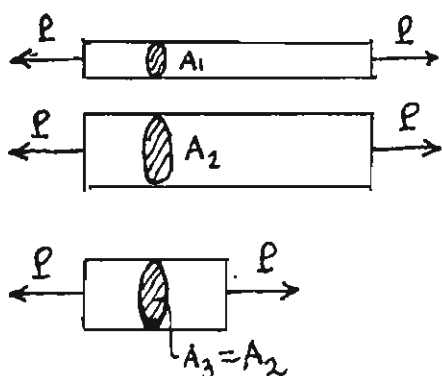


Figura 1

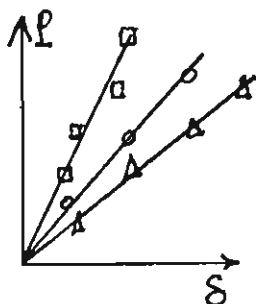


Figura 2a

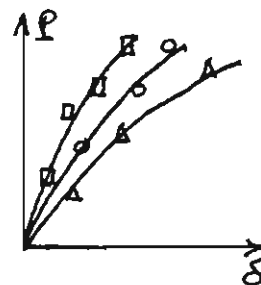


Figura 2b

cuerden los resultados de los experimentos efectuados con los tres especímenes simplifica el problema de la determinación del comportamiento carga-deformación de los materiales. Así, para obtener las características de la carga-elongación de un material específico, podemos experimentar con sólo una muestra y presentar el resultado en un gráfico P/A en función de δ/L como se muestra en las figuras 3a y 3b.

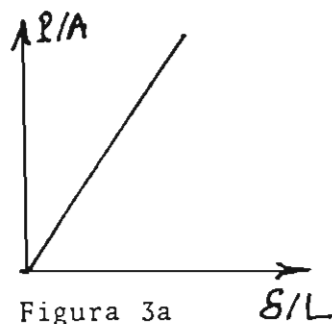


Figura 3a

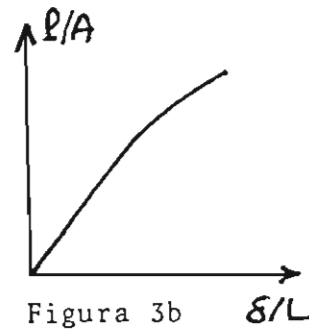


Figura 3b

Si la relación carga-elongación del material es lineal, ésta puede expresarse especificando la pendiente de la línea recta de la figura 3a. A esta pendiente se le denomina el módulo de elasticidad y se le designa usualmente por el símbolo E . En función de las coordenadas de la figura 3a, E está definida por

$$E = \frac{P/A}{\delta/L} \quad (1)$$

Ya que P/A tiene las dimensiones de fuerza por unidad de área y δ/L es adimensional, las dimensiones de E son las de fuerza por unidad de área. P/A es el esfuerzo promedio σ a lo largo del área A mientras que δ/L recibe el nombre de deformación ϵ a lo largo de la longitud L . Empleando las unidades de newton para la fuerza y de metro para la longitud, E tendrá las dimensiones de N/m^2 . Valores típicos de E para algunos materiales se muestran en la siguiente tabla.

Material	$E/(N/m^2)$
Acero	$200-210 \times 10^9$
Aluminio	70×10^9
Hierro fundido	$70 \text{ a } 140 \times 10^9$
Madera	$7 \text{ a } 14 \times 10^9$
Nylon	$28 \text{ a } 56 \times 10^9$
Hule blando	14×10^5
Músculo liso	$14 \text{ a } 1000$

Escribiendo en otra forma la definición de E, obtenemos la expresión

$$\delta = PL/AE \quad (2)$$

La ecuación (2) es una forma simple de la ley de Hooke, así llamada en honor de Robert Hooke, quién fue el primero en reconocer que muchos materiales tenían una relación lineal entre carga y elongación.

Deberá observarse que cuando la curva carga-elongación es una recta, una barra sólida sometida a cargas en sus extremos actúa de la misma manera que un resorte con los que estamos familiarizados. Si tuviéramos un resorte hecho de una barra de acero de 1 cm^2 de área y 1m de longitud, de la ecuación (2) se obtendrá:

$$K = P/\delta = AE/L = \frac{(0.01)^2 (210 \times 10^9)}{1} = 210 \times 10^5 \frac{N}{m}$$

Si el material es no lineal, no será posible representar la relación carga-elongación por una constante única; será necesario es

pecificar esta relación por la curva ilustrada en la figura 3b. El trabajo analítico con la curva carga-elongación no lineal es generalmente más complicado que cuando el material es lineal, en cuyo caso la relación carga-elongación puede expresarse en una forma analítica simple de la ecuación (2).

Por este motivo, cuando los materiales son ligeramente no lineales, se acostumbra aproximar los datos por una recta cuya pendiente se ajusta lo mejor posible al comportamiento no lineal. Hierro fundido, cobre y zinc son ejemplos de materiales ligeramente no lineales para los cuales los respectivos módulos de elasticidad se encuentran tabulados.

Se encuentra que para la mayoría de los materiales, en el caso de deformaciones pequeñas, el acortamiento debido a una fuerza compresora es igual a la extensión debida a una fuerza tensil de la misma magnitud. Supondremos que la ecuación (2) y las curvas de la figura 3a representan el comportamiento tanto en tensión como en compresión.

Hasta ahora hemos considerado la relación esfuerzo deformación para el caso especial de la carga uniaxial. Sólo una componente del esfuerzo, la componente normal, está presente, y sólo se consideró la componente axial de la deformación. Ahora generalizaremos el comportamiento elástico para obtener la relación entre las componentes del esfuerzo con las componentes de la deformación. Nos restringiremos a materiales que son elásticamente lineales. Las deformaciones serán pequeñas en comparación con la unidad.

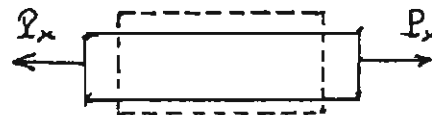
Para formular una relación general esfuerzo-deformación, aparte de datos para deformaciones con cargas uniaxiales, consideraremos algunos aspectos físicos de los materiales. Todos los sólidos poseen alguna regularidad en el arreglo de sus átomos.

Los átomos de los metales están arreglados en una red cristalina. Los plásticos consisten de moléculas de cadenas largas. Aún el vidrio posee algún orden en el arreglo tetraédrico de los átomos de silicio y oxígeno. Estos elementos estructurales tienen diferentes rigideces en diferentes direcciones. En muchos materiales, estos elementos estructurales están arreglados caóticamente y son tan pequeños que hay millones, en algunos casos billones, de billones de ellos en un centímetro cúbico. Un cubo de tal material que aparece pequeño a simple vista, tendrá miles de elementos estructurales poseyendo toda orientación concebible respecto a los ejes del cubo. Si las orientaciones son al azar, entonces dos cubos que se han cortado del mismo material en ángulos distintos tendrán la misma distribución estadística de orientaciones de los elementos estructurales relativa a los ejes del cubo.

Entonces, la rigidez promedio de los dos cubos será igual. De hecho, todas las propiedades elásticas en promedio serán iguales para todas las orientaciones posibles de los ejes coordinados dentro de un cubo. Un material isotrópico se define como aquel cuyas propiedades son independientes de la orientación. Puede pensarse que los materiales hechos de elementos estructurales ordenados al azar son estadísticamente isotrópicos.

Consideremos un elemento sobre el que actúa sólo una componente

del esfuerzo normal, como se muestra en la figura 4. Este esfuerzo normal producirá una componente de la deformación. Estamos considerando materiales en los cuales la deformación es directamente proporcional al esfuerzo. Esta relación puede expresarse mediante símbolos como:



$$\epsilon_x = \sigma_x / E$$

Figura 4

Esta es otra forma de expresar la ley de Hooke para una carga uniaxial. Además de la componente normal de la deformación en la dirección x , nuestros experimentos con bandas de hule, si no hay otra cosa, nos lleva a esperar que hay una contracción lateral cuando se estira una barra. Mediciones detalladas efectuadas durante el experimento de tensión apoyan esta hipótesis, y se encuentra que la deformación de contracción es una fracción fija de la deformación longitudinal de extensión. Además, pruebas con compresión uniaxial muestran una deformación lateral de extensión en la misma fracción fija de la deformación de compresión longitudinal. A esta fracción fija se le da el nombre de relación de Poisson y se la designa por el símbolo ν . Para un material elástico lineal, esta deformación puede expresarse como ϵ_y .

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x = -\nu \sigma_x / E.$$

Supongamos ahora que está presente una segunda componente del esfuerzo σ_y . En virtud de la linealidad de la relación esfuerzo de deformación, un incremento en el esfuerzo producirá siempre el mismo incremento en la deformación independientemente del nivel de esfuerzo anterior al incremento que se haya añadido. Las deforma

ciones resultantes de σ_y están relacionadas linealmente a σ_y , y se suman a las deformaciones producidas por σ_x . A causa de la isotropía, las deformaciones debidas a σ_y serán

$$\epsilon_y = \sigma_y / E, \quad \epsilon_x = -\nu \sigma_y / E$$

donde las constantes E y ν son iguales a las que aparecen en las expresiones para las deformaciones producidas por σ_x .

En el caso de un material isotrópico, elástico y lineal, cuando están actuando las dos componentes del esfuerzo, podemos resumir los argumentos anteriores escribiendo las siguientes relaciones deformación-esfuerzo aplicables en este caso:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu \sigma_x + \sigma_y)$$

Estas ecuaciones expresan la ley de Hooke para un cuerpo bidimensional cuando está sujeto a dos esfuerzos normales σ_x y σ_y .

2. Algunos experimentos preliminares servirán para ilustrar el comportamiento que exhiben los materiales cuando son sometidos a cargas. Desdobleemos un clip y fijémoslo entre un libro y la arista de una mesa. Lo presionamos ligeramente. Al eliminar la carga observamos que regresa a su forma original. Esto ilustra la deformación elástica, que se define como aquella que desaparece al eliminar la carga. Volvamos a cargar al alambre y observemos que a mayor deformación mayor es la carga. Al aumentar la carga observamos que se llega a un valor tal que cuando se la elimina el alambre no regresa completamente a su forma original, sino que perma-

nece parcialmente doblado. Colguemos del extremo del alambre una carga suficientemente grande para causar un doblamiento permanente y observamos que la deformación no aumenta en el transcurso del tiempo. Este fenómeno caracteriza a la deformación plástica, que se define como la deformación que depende de la carga aplicada, es independiente del tiempo y permanece al eliminarse la carga. Tratemos de romper el alambre doblándolo. Probablemente no lo logremos. Una estructura dúctil se define como aquella para la cual la deformación plástica antes de fracturarse es mucho mayor que la deformación elástica.

Si el experimento de flexión se repite usando, por ejemplo, la puntilla de un lapicero, el comportamiento es distinto: se fractura antes de deformarse apreciablemente. A este tipo de material se le llama frágil.

Consideremos ahora las curvas esfuerzo-deformación. Primero hay una región donde el esfuerzo es casi proporcional a la deformación. El límite proporcional se define como el máximo esfuerzo para el cual el esfuerzo es todavía proporcional a la deformación. El límite elástico se define como el esfuerzo máximo que puede aplicarse sin que resulte una deformación permanente al eliminar el esfuerzo. En la figura 5 se ilustra el comportamiento al cargar y al descargar un material que es elástico para esfuerzos mayores que el límite proporcional. Para los materiales mostrados en la figura 6 coinciden los límites de proporcionalidad y elásticos. Para estos materiales, si el esfuerzo aumenta más allá del

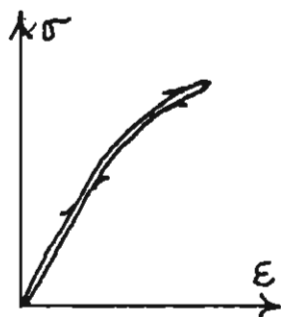


Figura 5

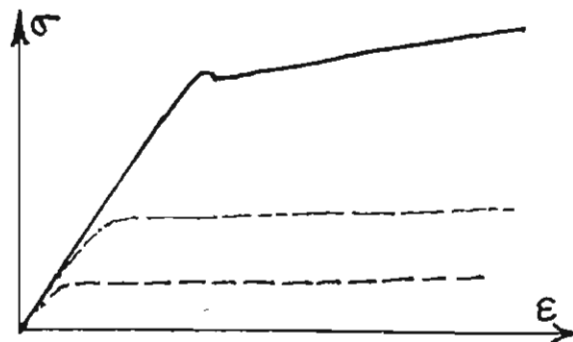


Figura 6

límite elástico, al eliminarlo, la curva esfuerzo deformación tiene la forma mostrada en la figura 7. Las pendientes de las curvas de carga y descarga son prácticamente iguales a la pendiente de la región elástica inicial. A la región elástica sigue la región plástica en la que la deformación aumenta sin que aumente el es-

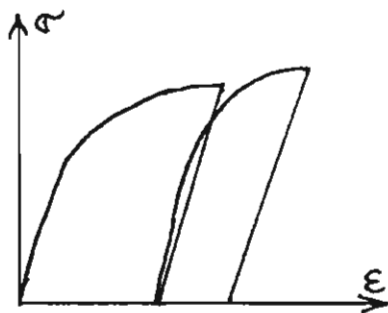


Figura 7

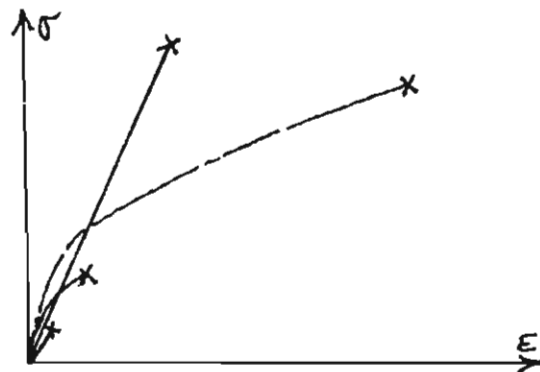


Figura 8

fuerzo. En algunos casos hay una disminución de éste. Finalmente se llega a la rotura del material.

En la figura 8 se observa que, para el vidrio, el esfuerzo es proporcional a la deformación hasta el punto de rotura. Su comportamiento es totalmente elástico; no existe evidencia de deformación

El esfuerzo σ_x es positivo y de magnitud igual a la fuerza $P_x = 36\text{kN}$ dividido entre el área $A_x = (5 \times 10^{-2}\text{m})(5 \times 10^{-3}\text{m}) = 2.5 \times 10^{-4}\text{m}^2$.

Así

$$\sigma_x = + (36 \times 10^3 \text{N}) / (2.5 \times 10^{-4} \text{m}^2) = 14.4 \times 10^7 \text{N/m}^2 = 1440 \times 10^5 \text{N/m}^2$$

lo que es aproximadamente igual a 1430 atmósferas. Ya que $\sigma_y = 0$, la deformación a lo largo de la dirección x será igual a

$$\epsilon_x = \sigma_x / E = (1440 \times 10^5 \text{N/m}^2) / (2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2) = 7 \times 10^{-4}$$

La deformación es una cantidad adimensional. La elongación correspondiente será

$$\delta_x = L_x \epsilon_x = (0.1\text{m})(7 \times 10^{-4}) = 7 \times 10^{-5} \text{m} = 0.007 \text{cm}$$

y la elongación en la dirección y

$$\delta_y = L_y \epsilon_y = L_y (-\nu \epsilon_x / E) = -\nu L_y \epsilon_x = -(0.27)(5\text{cm})(7 \times 10^{-4}) = 0.0009 \text{cm}$$

El signo menos indica que se trata de una contracción.

(b) Para que la deformación se haga igual a cero en la dirección x habrá que aplicar una fuerza de tensión en la dirección y que producirá una contracción en la dirección x que cancele, precisamente, la extensión producida por la fuerza P_x . Deberá tenerse

$$0 = \epsilon_x = (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E, \text{ o sea,}$$

$$\sigma_y = \sigma_x / \nu = (1440 \times 10^5 \text{N/m}^2) / 0.27 = 5.3 \times 10^8 \text{N/m}^2.$$

La fuerza de tensión que deberá aplicarse en la dirección y es

$$P_y = A_y \sigma_y = (0.1\text{m})(5 \times 10^{-3}\text{m})(5.3 \times 10^8 \text{N/m}^2) = 2.7 \times 10^5 \text{N}.$$

(c) La elongación en la dirección y debida a la aplicación simultánea de las fuerzas P_x y P_y será

plástica ni a la tensión ni a la compresión. Asimismo, el esfuerzo al que se presenta la rotura es mucho mayor en compresión que en tensión; esta es una característica normal en los materiales frágiles.

3. Para ilustrar el empleo de las relaciones entre la carga y la elongación y adquirir una idea de los órdenes de magnitud de las diferentes cantidades que aparecen, consideraremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. (Figura 9) La fuerza P_x está uniformemente distribuida a lo largo de la superficie normal al eje x . Determinar (a) las elongaciones en las direcciones x e y , (b) la fuerza que deberá aplicarse uniformemente sobre la cara perpendicular al eje y de modo que junto con P_x produzca una elongación en la dirección x igual a cero y, en este caso, (c) la elongación en la dirección y . Se trata de una placa de acero con $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y $\nu = 0.27$.

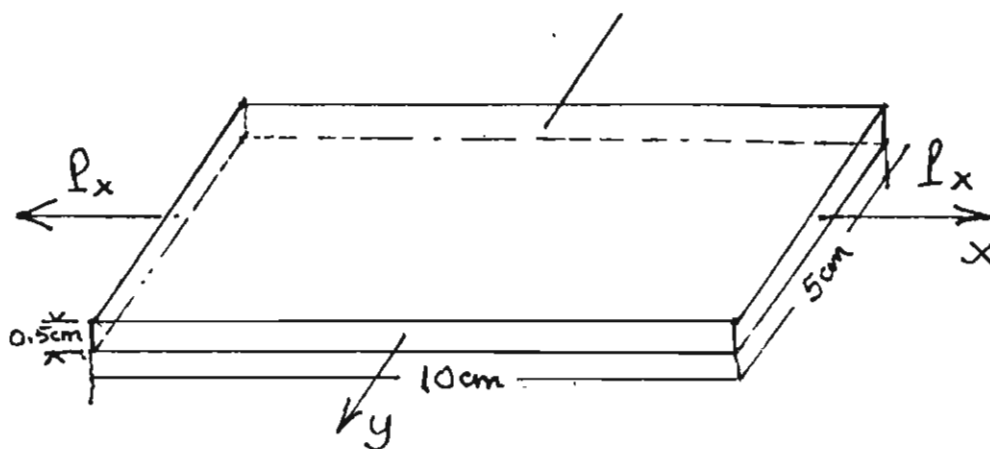


Figura 9

$$\delta_y = L_y \epsilon_y = L_y (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E =$$

$$= (5 \times 10^{-2} \text{ m}) ((5 \times 10^5 - 0.27 \times 1.4 \times 10^8) \text{ N/m}^2) / (2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2) = -9 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Ejemplo 2. (Figura 10) Un alambre de acero, $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, que tiene una longitud de 4m se emplea para sujetar en su punto medio a una viga de 2m de longitud que se encuentra articulada en su extremo izquierdo. Determinar el área mínima que deberá tener el cable para que al subir un hombre de 1000N de peso en el extremo derecho de la viga la elongación del alambre no sea mayor que 1cm.

Se tendrá

$$\delta = L \epsilon = L \frac{\sigma}{E} = L \frac{1}{E} \frac{F}{A} < 10^{-2} \text{ m}$$

donde $L = 4\text{m}$ es la longitud del cable, $\epsilon = \sigma/E$ la deformación, $\sigma = F/A$ el esfuerzo debido a la fuerza de tensión F que se ejerce sobre el cable de área A . Claramente en la situación de equilibrio la tensión del cable es de 2000N. Entonces

$$A > \frac{LF}{E 10^{-2} \text{ m}} = \frac{(4\text{m})(2000\text{N})}{(2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2)(10^{-2} \text{ m})} = 3.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 3.8 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$$

Bastará tener un cable circular de radio mayor de 1.2 mm para que se satisfaga lo solicitado.

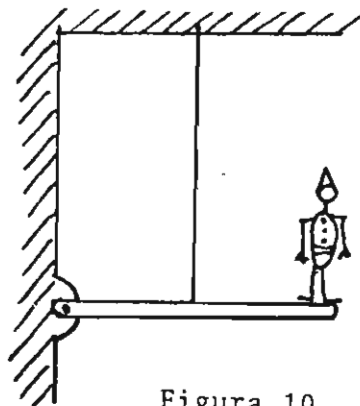


Figura 10

4.3 Problemas

01. Un alambre se rompe cuando la tensión rebasa los 1000N. Si se usa el alambre para jalar una caja sobre el piso, ¿Cuál será el peso máximo que puede moverse si el coeficiente de fricción estática es de 0.35?

02. (Figura 01) Dos bloques están unidos mediante una polea sin masa. El peso del bloque A es de 100N y el coeficiente de fricción cinética es de 0.20. El bloque A resbala hacia abajo por el plano inclinado con una rapidez constante. Determinar el peso del bloque B.

03. (Figura 02) Una fuerza horizontal de 50N empuja a un bloque que pesa 30N contra una pared vertical. El coeficiente de fricción estática entre la pared y el bloque es de 0.60 y el coeficiente de fricción cinética de 0.40. Supongamos que el bloque está inicialmente en reposo. (a) ¿Comenzará el bloque a moverse? (b) ¿Cuál será la fuerza que la pared ejerce sobre el bloque?

04. (Figura 03) El bloque B pesa 700N. El coeficiente de fricción estática entre dicho bloque y la mesa es de 0.25. Encontrar el peso máximo que deberá tener el bloque A para que el sistema esté en equilibrio.

05. (Figura 04) Hallar la máxima altura h del escalón que puede alcanzar un hombre que pesa 900N sin que se derrumbe la escalera. El coeficiente de fricción estática en A y en B es de 0.50. Cada pata de la escalera pesa 150N.

06. Determinar el ángulo máximo α que puede formar un plano inclinado con la horizontal para que un bloque situado sobre él no se deslice hacia abajo.

07. (Figura 05) La varilla delgada uniforme de peso P está a punto de deslizar cuando se coloca en la posición indicada contra la pared vertical. Hallar la expresión del coeficiente de fricción estática f , el cual es el mismo en los dos pares de superficies en contacto.

08. (Figura 06) Una barra cuadrada de acero y otra similar de aluminio tienen las dimensiones indicadas en la figura. Calcular la magnitud del peso P que hará que la longitud total de las dos barras disminuya en 0.025 cm. $E(\text{acero}) = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y $E(\text{aluminio}) = 0.7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

09. (Figura 07) Una barra rígida está suspendida de dos alambres. El de la izquierda es de acero con $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y $A = 0.5 \text{ cm}^2$; el de la derecha es de aluminio con $E = 0.7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y $A = 1.0 \text{ cm}^2$. Si el peso P es de 10000N, ¿cuál será el desplazamiento de la barra debido al alargamiento de los alambres?

10. (Figura 08) Determinar el diámetro mínimo d de la barra AB para que la deflexión vertical del punto B no exceda de 0.5 cm y el esfuerzo en dicha barra no pase de 10^8 N/m^2 cuando se tiene una carga $F = 50000\text{N}$. La deflexión se debe enteramente al alargamiento de la barra AB.

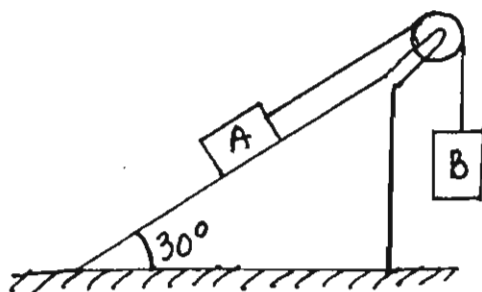


Figura 01

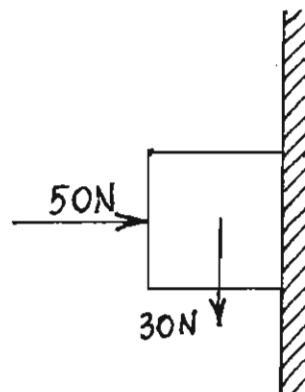


Figura 02

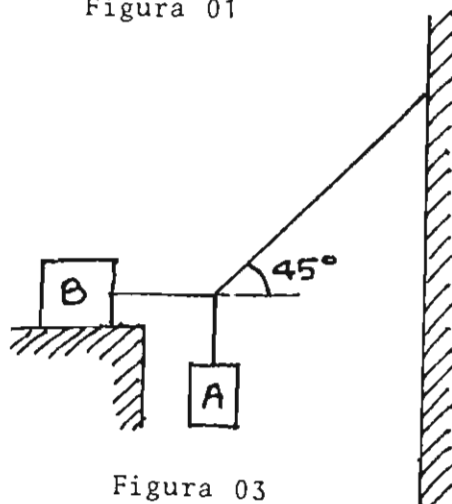


Figura 03

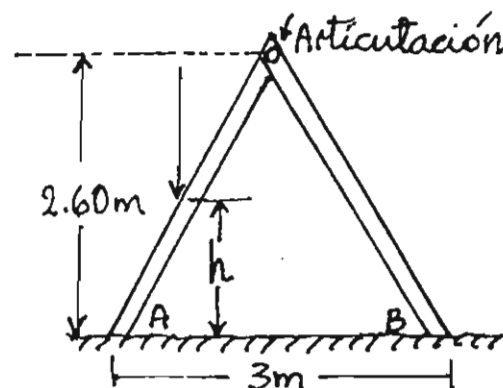


Figura 04

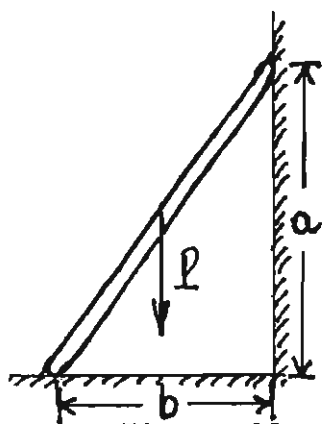


Figura 05

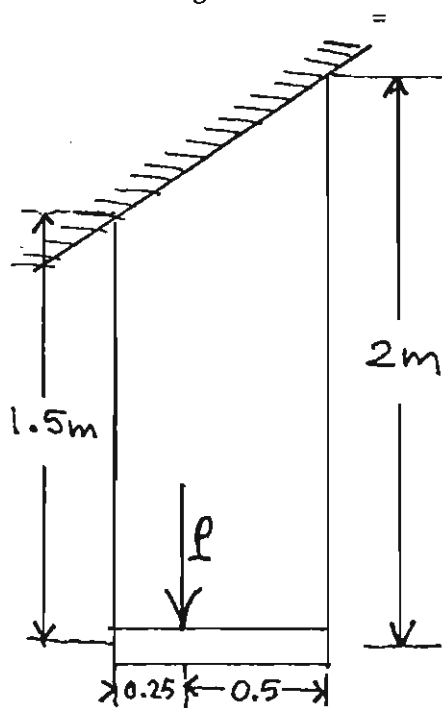


Figura 07

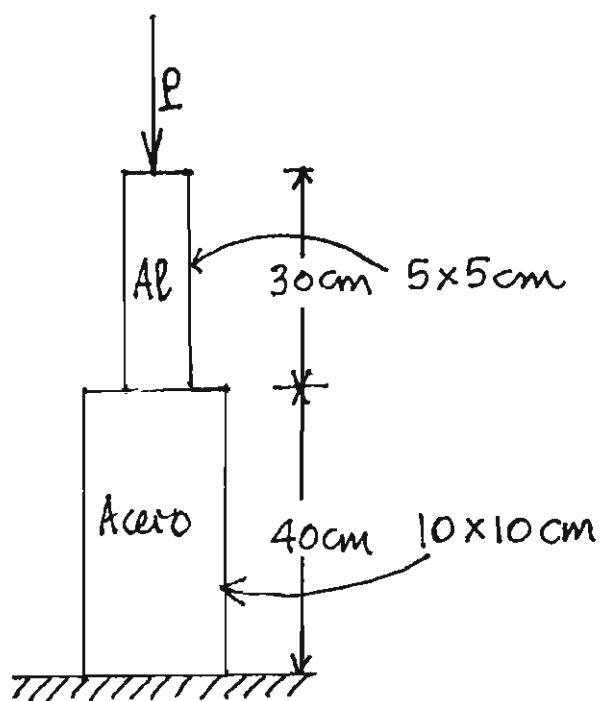


Figura 06

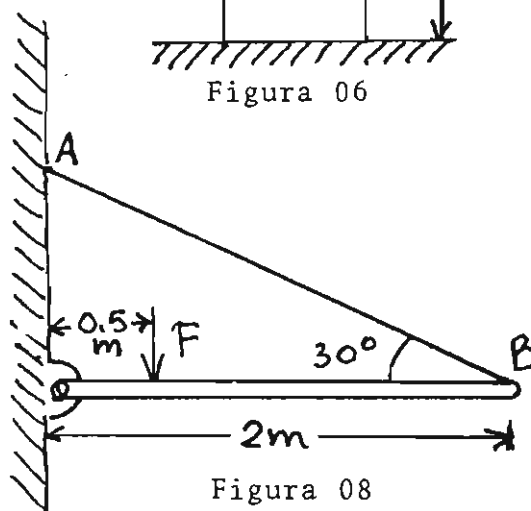


Figura 08

UNIDAD 5. FUERZA Y CAMPO GRAVITACIONALES

5.1 Ley de la fuerza gravitacional

5.2 Principio de superposición

5.3 Problemas

Preparó: Javier Álvarez

Referencias:

U.Haber - Schaim, JB Cross, JH Dodge y JA Walter, PSSC Física, tercera edición. Editorial Reverté, Barcelona, 1975, Capítulo 13.

D.Halliday y R.Resnick, Fundamentos de Física, CECSA, México, 1978. Capítulo 14, secciones 14-1 a 14-4 y 14 - 6.

S.Gartenhaus, Física, Interamericana, México, 1979, Sección 4 - 7.

5.1 Ley de la fuerza gravitacional

1. Describir el experimento de Cavendish y enunciar la ley de la gravitación universal.
2. Hacer una gráfica de la fuerza de gravedad en función de la distancia entre dos masas puntuales.
3. Definir el campo como la asociación de una magnitud física a cada punto del espacio.
4. Definir la intensidad de campo gravitacional como la fuerza sobre la unidad de masa gravitacional.
5. Definir líneas de fuerza.

1. La formulación de la ley de la gravitación universal constituye uno de los logros más importantes e interesantes de la Física. Definitivamente, los fenómenos que motivaron su estudio fueron los movimientos de los planetas en el sistema solar. Correspondió a Kepler (sus tres leyes) y a Galileo (principio de inercia) sentar las bases más firmes para su desarrollo total. Sin embargo, fué Newton el que utilizó los resultados obtenidos por aquéllos y postuló la ley de la gravitación, proponiendo que dos cuerpos cualesquiera de masas m_1 y m_2 , se atraían entre sí con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r_{12} que los separa. Matemáticamente

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (1)$$

o bien en forma de igualdad

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (2)$$

en donde G es la constante universal de la gravitación y tiene el mismo valor para cualesquiera dos partículas puntuales con masa. La primera medición precisa de G fue realizada en 1798 por Lord Cavendish empleando el método de "máxima deflexión". El dispositivo experimental (Fig. 1) consiste de dos pequeñas esferas con masas m sujetas a los extremos de una varilla ligera, todo esto col-

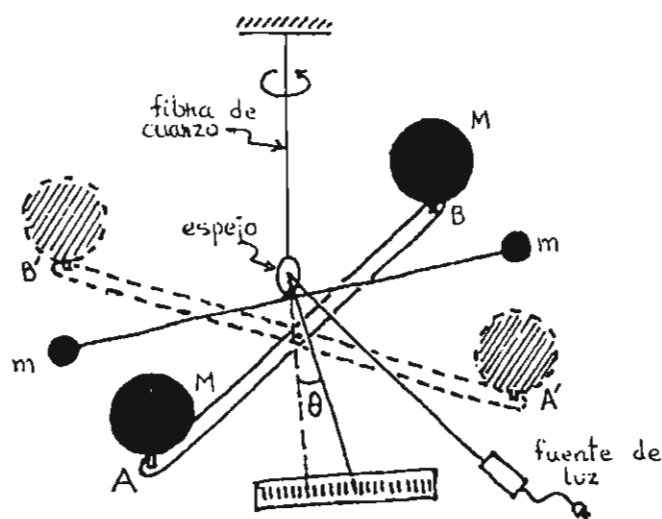


Figura 1. Dispositivo experimental de Cavendish

gando de una fina fibra de cuarzo. En la otra estructura, horizontal también se sujetan a los extremos dos grandes esferas de masas M . Cuando las esferas grandes se colocan en las posiciones A y B , las esferas pequeñas son atraídas por la fuerza de gravedad y la estructura suspendida gira ligeramente en el sentido contrario de las manecillas del reloj (visto desde arriba). Cuando las esferas grandes se colocan en A' y B' , la estructura suspendida gira en el sentido opuesto. En los dos casos, la fibra de cuarzo experimenta una torsión. El ángulo de torsión de la fibra se mide al

observar las deflexiones del haz de luz reflejado en el espejo. Como las masas de las esferas son conocidas, así como su separación, y la constante de torsión de la fibra, entonces se puede medir G a partir del ángulo θ . El valor más reciente de G , es

$$G = 6.6720 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

Como se sabe, todo punto P en el espacio queda definido al dar sus coordenadas x, y, z . Sin embargo, dicho punto también queda determinado mediante un vector de posición \vec{r} , que tiene como extremos el origen O de coordenadas y el propio punto P , apuntando hacia este último (Fig. 2). En XYZ , el vector \vec{r} que tiene como mag-

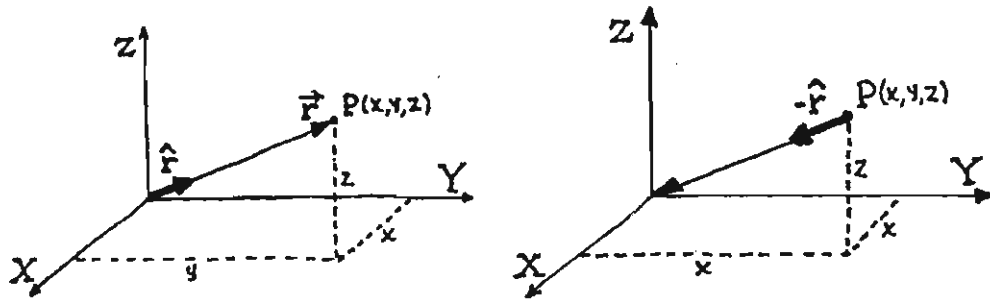


Figura 2 (a) Vector \vec{r} de posición de $P(x, y, z)$ y vector unitario \hat{r} ; (b) Vector $-\vec{r}$ y vector unitario $-\hat{r}$.

nitud $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, que representa la distancia entre O y $P(x, y, z)$.

Se define el vector $-\vec{r}$ como aquel que tiene la misma magnitud y dirección que \vec{r} pero en sentido opuesto, es decir, apuntaría de P hacia O . De aquí que $|\vec{r}| = |-\vec{r}|$. Considerando esto, se define el vector unitario \hat{r} como

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (3)$$

con una magnitud $|\hat{r}| = 1$ y con la misma dirección y sentido que \vec{r} .

Análogamente

$$-\hat{r} = \frac{-\vec{r}}{|-\vec{r}|}, \text{ con } |-\hat{r}| = 1 \quad (4)$$

Supóngase ahora que se tienen dos masas m_1 y m_2 separadas una distancia $r = r_{21} = r_{12}$ (Fig 3). Sea \vec{F}_{12} la fuerza gravitacional que m_1 ejerce sobre m_2 y apunta de m_2 hacia m_1 . Entonces

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} (-\hat{r}_{12}) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (5)$$

análogamente, para \vec{F}_{21}

$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} (-\hat{r}_{21}) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \quad (6)$$

donde \hat{r}_{12} y \hat{r}_{21} son vectores unitarios de m_1 hacia m_2 y de m_2 hacia m_1 , respectivamente.

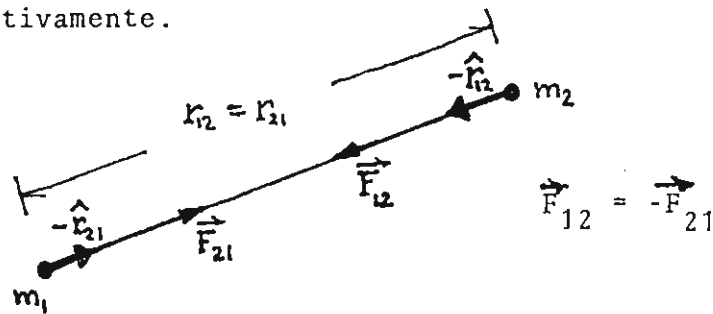


Figura 3. Fuerzas gravitacionales sobre m_1 y sobre m_2

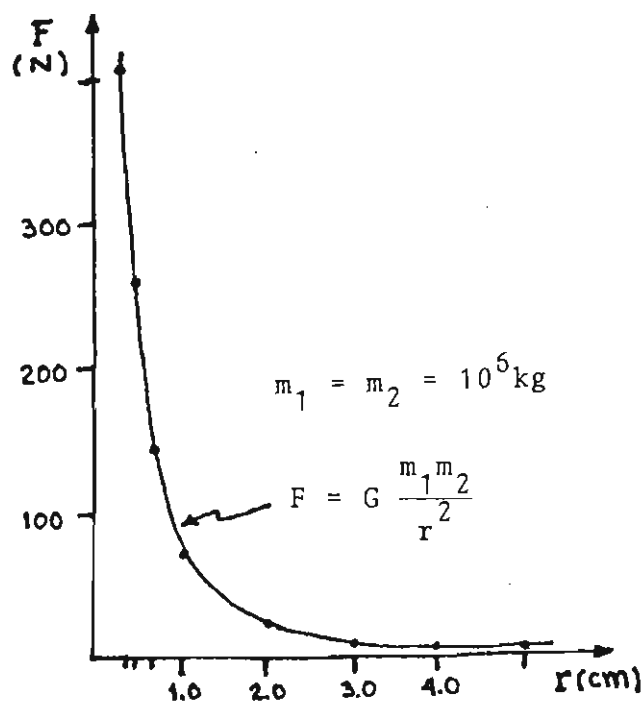
Resumiendo, la ley de la gravitación universal establece que: La fuerza gravitacional entre dos partículas cualesquiera, con masas m_1 y m_2 y separadas por una distancia r_{12} es de atracción, actuando a lo largo de la línea que las une y tiene como magnitud

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (7)$$

Es importante recalcar que la ley de la gravitación universal es válida sólo para partículas puntuales o para cuerpos grandes, de dimensiones despreciables comparadas con la distancia que los separa. También se puede demostrar que dicha ley es válida para esferas homogéneas.

2. Para visualizar cómo depende de la distancia la fuerza gravitacional entre dos partículas se presenta en la figura 3 una gráfica

de F vs r : Las masas de las partículas consideradas son iguales y tienen un valor de 10^6 kg.



r (cm)	F (N)
0.4	417.0
0.5	266.9
0.7	136.1
1.0	66.7
2.0	16.68
5.0	2.67
10.0	0.67

Figura 3. Variación de la fuerza gravitacional con la distancia para partículas con masas $m_1 = m_2 = 100$ Tons.

3. Se dice que está definido un campo cuando cada punto del espacio tiene asociado una magnitud física. Si dicha magnitud es escalar, queda definido un campo escalar y si la magnitud es vecto - rial, entonces se tiene un campo vectorial. Por lo tanto, las tem - peraturas, densidad de masa, energía potencial, etc, constituyen campos escalares; mientras que las fuerzas, aceleraciones, veloci - dades, densidad de corriente, etc, forman campos vectoriales. Co - mo ejemplo, supóngase que se calienta un cuerpo cualquiera en una superficie S_1 y se le enfría en otra superficie S_2 (Fig. 4). Enton - ces, en esa región del espacio se tiene un campo escalar de tempe - raturas, ya que cada punto del cuerpo se encuentra a una tempera - tura T .

En este mismo ejemplo también existe un campo vectorial definido por las corrientes de calor, y representadas por el vector \vec{H} . La magnitud de este vector es la cantidad de energía térmica que atra

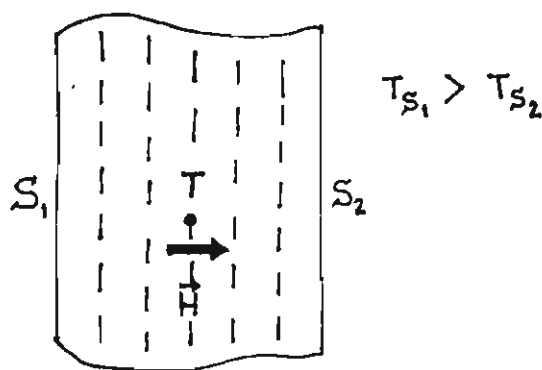


Figura 4. Campo escalar T formado por las temperaturas y campo vectorial H de flujos de calor en un cuerpo.

viesa por unidad de tiempo y de superficie un elemento infinitesimal de superficie perpendicular a la dirección de propagación. El vector \vec{H} está orientado en el sentido de propagación.

4. Supóngase ahora una partícula de masa m_2 colocada en la vecindad de otra partícula de masa m_1 a una distancia r_{12} . La fuerza F_{12} con que atrae 1 a 2 (ecuación 5) es

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (5)$$

Si m_2 es la unidad de masa gravitacional, entonces la cantidad

$$\vec{g}(\vec{r}_{12}) = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} \quad (8)$$

Se le llama intensidad de campo gravitacional o, simplemente, campo gravitacional.

Como puede apreciarse, en la ecuación 8, $\vec{g}(\vec{r}_{12})$ es una aceleración y depende sólo de m_1 y r_{12} . En otras palabras, \vec{g} es una propiedad

del espacio que rodea a m_1 y significa que cualquier partícula colocada a una distancia r_{12} de m_1 experimentará una aceleración de magnitud $(Gm_1)/r_{12}^2$, hacia m_1 . Por lo tanto, toda partícula con masa tiene definido en su alrededor un campo vectorial gravitacional. Entonces, quitando los subíndices, la ecuación 8 queda

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{m}{r^2} \hat{r} \quad (9)$$

La dirección y sentido del vector \vec{g} debido a una partícula m , siempre apunta hacia esta última.

Las unidades de la intensidad de campo gravitacional en el Sistema Internacional (SI) son m/s^2 .

En particular, si se aplica la definición de campo gravitacional en un punto en la superficie de la Tierra.

$$g(R_T) = -G \frac{M_T}{R_T^2} R_T \quad (10)$$

donde R_T es el radio de la Tierra (supuesta esférica y homogénea).

La fuerza de atracción sobre un cuerpo de masa m colocado en la superficie es $\vec{F} = m\vec{g}(R_T)$ o, simplemente, el peso $\vec{P} = m\vec{g}$.

Ejemplo 1: Calcular la fuerza media de atracción gravitacional entre la Tierra y la Luna y entre la Tierra y el Sol.

Masa de la Tierra = 5.98×10^{24} kg

Masa de la Luna = 7.36×10^{22} kg

Masa del Sol = 1.99×10^{30} kg

Distancia media Tierra-Luna = 3.80×10^5 km = 3.80×10^8 m

Distancia media Tierra-Sol = 149.6×10^6 km = 1.469×10^{11} m

Magnitud de la fuerza Tierra-Luna:

$$\begin{aligned}
F_{TL} &= Gm_T m_L r_{TL}^{-2} \\
&= (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}) (5.98 \times 10^{24} \text{ kg}) (7.36 \times 10^{22} \text{ kg}) (3.80 \times 10^8 \text{ m})^{-2} \\
&= 2.03 \times 10^{20} \text{ N}
\end{aligned}$$

Magnitud de la fuerza Tierra-Sol:

$$\begin{aligned}
F_{TS} &= Gm_T m_S r_{TS}^{-2} \\
&= (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}) (5.98 \times 10^{24} \text{ kg}) (1.99 \times 10^{30} \text{ kg}) (1.496 \times 10^{11} \text{ m})^{-2} \\
&= 3.55 \times 10^{22} \text{ N}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la magnitud de la fuerza Tierra-Sol es aproximadamente 175 veces mayor que la fuerza Tierra-Luna.

Ejemplo 2: ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra la aceleración de la gravedad será de 4.9 m/s^2 ? La masa de la Tierra es $6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ y su radio medio es $6.4 \times 10^6 \text{ m}$.

De la ecuación 10

$$g = +G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

donde h es la altura sobre la superficie terrestre. Sustituyendo

$$\begin{aligned}
4.9 \text{ ms}^{-2} &= (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}) (6.0 \times 10^{24} \text{ kg}) ((6.4 \times 10^6 \text{ m}) + h)^{-2} \\
((6.4 \times 10^6 \text{ m}) + h)^2 &= 8.167 \times 10^{13} \text{ m}^2 \\
h &= (8.167 \times 10^{13} \text{ m}^2)^{1/2} - (6.4 \times 10^6 \text{ m}) = 2.637 \times 10^6 \text{ m} \\
&= 2637 \text{ km}.
\end{aligned}$$

5. Veamos ahora cómo es posible representar gráficamente un campo vectorial como lo es, por ejemplo, el campo gravitacional. Podemos dibujar un diagrama en el que mediante flechas se indique el valor del campo en un número grande de puntos del espacio, como se ilustra en la figura 5, para el campo gravitacional generado por una partícula de masa m_1 .

En lugar de proceder en esta forma, podemos representar el campo mediante líneas, llamadas líneas de fuerza o líneas de campos. Cada una de ellas se construye desplazando continuamente un punto en la dirección de la fuerza ejercida sobre la partícula móvil. Cuando la fuerza cambia de dirección lo mismo ocurre con la línea de fuerza. Esta representación se muestra en la figura 6 para el caso del campo gravitacional generado por una masa puntual. Es claro que si un campo está representado mediante líneas la única información que obtendremos es la dirección en la que la fuerza está actuando en un punto determinado, ya que esta es la dirección de la tangente a la línea de campo que pasa por el punto en cuestión.

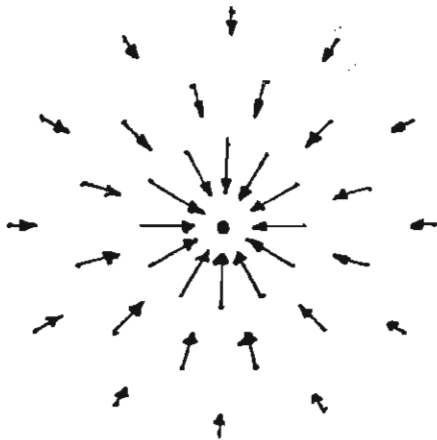


Figura 5

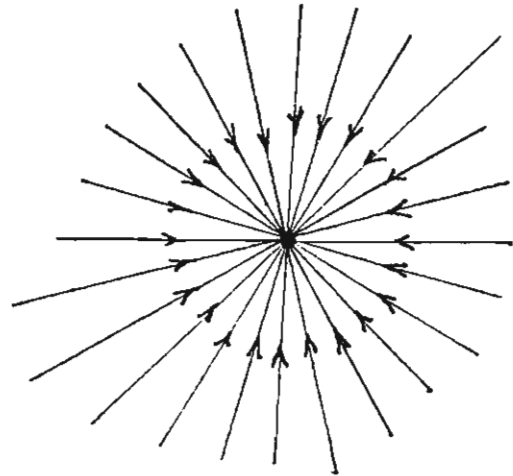


Figura 6

5.2. Principio de superposición

1. Enunciar el principio de superposición;
2. Calcular la fuerza sobre una masa puntual producida por varias masas puntuales.

1. Ya se ha visto cuál es la fuerza gravitacional entre dos partículas puntuales. Pero ¿qué sucede cuándo hay tres o más partículas? Para contestar esta pregunta es necesario suponer dos hechos:

- a) La fuerza gravitacional entre dos partículas cualquiera no depende de la presencia de otra partícula;
- b) La fuerza gravitacional total sobre una partícula, debida a varias masas puntuales, es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por cada una de ellas.

2. Empleando el principio superposición es posible calcular la fuerza que ejerce un cuerpo cualquiera sobre una partícula de masa m . Para esto basta considerar a dicho cuerpo como formado por un número grande de partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_n . Posteriormente se obtiene la fuerza que sobre m ejerce cada una de esas partículas. Esto es, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$. Finalmente, la fuerza que el cuerpo ejerce sobre la masa m será:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

Análogamente, se calcula el campo gravitacional $\vec{g}(r)$ debido a un cuerpo cualquiera en un cierto punto P :

$$\vec{g} = \vec{g}_1(\vec{r}_1) + \vec{g}_2(\vec{r}_2) + \dots + \vec{g}_n(\vec{r}_n)$$

en donde $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$, es la intensidad en P del campo debido a cada masa m_1, m_2, \dots, m_n , y $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ son los vectores de posición de las masas respecto a P .

5.3 Problemas

01. Encontrar el peso que un hombre de 100 kg tendrá en Júpiter.
02. ¿Cuál es el cambio porcentual en la aceleración de la Tierra hacia el Sol cuando hay un eclipse total de Sol con respecto a la situación en que la Luna está directamente opuesta al Sol?
03. La masa de la Luna es $1/81$ de la masa de la Tierra y su radio es $1/4$ del de la Tierra. Determinar la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Luna.
04. La distancia entre el Sol y la Tierra es de 1.5×10^{11} m y su masa es de 3.2×10^5 veces la masa de la Tierra. ¿A qué distancia de la Tierra deberá colocarse un cuerpo en la dirección del Sol para que la fuerza neta sobre éste sea cero?
05. Una masa de 800 kg y otra de 600 kg están separadas por una distancia de 0.25 m. Se coloca una masa de 10 kg a una distancia de 0.20 m de la primera y a una distancia de 0.15 m de la segunda. Determinar la fuerza gravitacional neta sobre esta masa.
06. El radio de un cierto planeta hipotético es de 500 km y la gravedad sobre su superficie es de 3.0 m/s^2 . Determinar: (a) el campo gravitacional a 100 km sobre la superficie del planeta; (b) la masa del planeta.
07. Si un planeta de una densidad dada se hiciera más grande, su fuerza de atracción sobre un objeto en la superficie se incrementaría a causa de la masa mayor del planeta, pero disminuiría debido a la distancia más grande del objeto al centro del planeta. ¿Cuál efecto predomina? ¿Por qué?
08. Dibuje aproximadamente, usando el principio de superposición para \vec{g} , las líneas de fuerza de dos partículas separadas una distancia d y con masas $m_1 = M$ y $m_2 = .2M$.

UNIDAD 6. FUERZA Y CAMPO ELECTROSTÁTICOS

6.1 Ley de Coulomb

6.2 Campo eléctrico

6.3 Dipolo eléctrico

6.4 Conductores y aislantes

6.5 Problemas

Preparó: Javier Álvarez

U. Haber - Schaim, JB Cross, JH Dodge y JA Walter, PSSC Física, tercera edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975. Capítulo 19.

D. Halliday y R. Resnick, Fundamentos de Física, CECSA México 1978. Capítulos 22 y 23.

S. Gartenhaus, Física, Interamericana, México, 1979. Capítulo 19 y secciones 20-1 a 20-5.

6. FUERZA Y CAMPO ELECTROSTÁTICOS

6.1 Ley de Coulomb

1. Establecer que sólo existen dos tipos de cargas eléctricas.
2. Describir el experimento de Coulomb y enunciar la ley de la fuerza electrostática.
3. Introducir el coulomb como la unidad de carga y la unidad y la magnitud de la constante de la fuerza de Coulomb.
4. Mencionar que la carga está cuantizada.

1. El estudio de los fenómenos eléctricos nace de la observación de las propiedades que adquirirían algunos cuerpos cuando se frotaban con algún paño. Se encontraba que el ámbar, al ser frotado, atraía pequeños pedacitos de paja que se hallaban en su proximidad. Al realizar muchos experimentos frotando varios materiales con seda, piel y lana, se llegó a la conclusión de que a veces los cuerpos se atraían y en otras veces se repelían entre sí. Fué Benjamín Franklin quién definió como positiva la electricidad o carga que aparecía en el vidrio, al frotarse con seda, y como negativa la generada en el hule, al frotarse con piel. Estas definiciones permanecen hasta la fecha. De aquí que hoy se acepte que en el universo sólo existen dos tipos diferentes de cargas eléctricas: la positiva y la negativa. Otro resultado importante de dichos experimentos es que cargas del mismo signo se repelen y las de diferente signo se atraen. Además de estos resultados se observó que al frotar un material, éste adquiriría un cierto tipo de carga, mientras que el material frotador adquiriría el otro tipo de carga, ambas de la misma magnitud. Esto es, la materia se mostraba en la naturaleza en su estado neutro y al frotar dos cuerpos había redistribución de las cargas en dichos cuerpos.

2. El primero en medir cuantitativamente las atracciones y repulsiones eléctricas fué Charles Angustin Coulomb y de aquí pudo obtener la ley que gobierna estas interacciones. Su dispositivo experimental, mostrado en la figura 1, consiste de una mancuerna que cuelga de una fina fibra de cuarzo, cuya constante de torsión era conocida. Sujeta a una estructura fija se ponía otra pequeña esfera b.

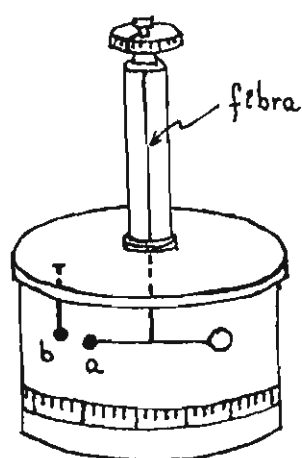


Figura 1. Dispositivo experimental de Coulomb

Coulomb cargó las pequeñas esferas a y b con el mismo tipo de electricidad, de manera que se repelieran. La fuerza de repulsión torcía la fibra. El método para determinar la fuerza era torcer la fibra un cierto ángulo para mantener a las esferas cargadas a una distancia fija, que también era medida. Entonces θ era una medida indirecta de las fuerzas electrostáticas. El dispositivo mostrado en la figura 1 se llama balanza de torsión. Nótese la analogía con el dispositivo empleado por Cavendish para medir G.

Los primeros resultados de Coulomb pueden expresarse como

$$F \sim \frac{1}{r^2} \quad (1)$$

en donde F es la magnitud de la fuerza de interacción entre dos cargas separadas por una distancia r . Estas fuerzas, como lo requiere la 3a Ley de Newton, coinciden con la línea que une las cargas pero apuntan en sentidos opuestos.

La fuerza entre las cargas también depende de la magnitud de las cargas. Específicamente es proporcional a su producto. Aunque Coulomb no probó esto rigurosamente, sí lo dejó implícito. Entonces:

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2)$$

en donde q_1 y q_2 son las magnitudes relativas de las cargas de las esferas a y b . La ecuación 2 es la llamada ley de Coulomb y se cumple sólo para objetos cuyas dimensiones son despreciables comparadas con la distancia que los separa. Se puede probar que (2) también es válida para esferas cargadas homogéneamente donde r será la distancia entre sus centros.

3. Por razones prácticas, la unidad de carga eléctrica en el Sistema Internacional (SI) no se define mediante una balanza de torsión, sino en función de una corriente eléctrica i , esto es, un flujo de carga eléctrica en la unidad de tiempo. Teniendo en cuenta que la unidad de corriente en el SI es el ampere, A :

La unidad de carga eléctrica en el SI es el coulomb C , que se define como la cantidad de carga eléctrica que fluye a través de cualquier sección transversal de un alambre en 1 segundo, si la corriente que existe en el alambre es de 1 ampere. En símbolos:

$$q = it \quad (3)$$

donde q se expresará en coulomb si i está expresada en ampere y t en segundo. La ecuación (2) puede escribirse en forma de igualdad insertando una cierta constante de proporcionalidad K . Dicha constante tiene el valor de $K = 9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

Resumiendo, la ley de Coulomb se puede enunciar como: La fuerza electrostática entre dos cuerpos cargados y separados por una distancia r es de repulsión o atracción, dependiendo si las cargas son de signos iguales o diferentes, dirigida a lo largo de la línea que los une, directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos; siendo su magnitud igual a

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (4)$$

en donde q_1 y q_2 son las cargas y K la constante de proporcionalidad.

En notación vectorial, la fuerza electrostática que q_1 ejerce sobre q_2 cuando está a una distancia r_{12} es

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (5)$$

en donde \hat{r}_{12} es el vector unitario de q_1 a q_2 . Esta relación proporciona el sentido correcto de \vec{F}_{12} si se usa el valor de las cargas con su signo.

Es de hacerce notar que la ley de Coulomb es sólo válida para partículas puntuales. También se puede demostrar su validez entre cuerpos uniformemente cargados y con simetría esférica.

4. Aunque, antiguamente se pensaba que la carga eléctrica era un fluido continuo, la teoría atómica de la materia demostró que, inclusive los fluidos mismos, como el agua y el aire, no son continuos sino hechos de átomos. Los experimentos han mostrado que el

"fluido eléctrico" no es continuo sino que está formado de múltiplos enteros de una cierta carga mínima. Esta carga fundamental, se le designa con el símbolo e (ya que tiene la misma magnitud de la carga del electrón), tiene la magnitud $1.6021892 \times 10^{-19}$ C. Cualquier carga q , físicamente existente, no importando su origen, puede ser escrita como $q = ne$, en donde n es un entero positivo o negativo.

Cuando una propiedad física, tal como la carga, existe en paquetes discretos y no en cantidades continuas, se dice que la propiedad está cuantizada.

6.2 Campo eléctrico

1. Definir campo electrostático como la fuerza eléctrica sobre la unidad de carga.
2. Representar, en casos sencillos, mediante líneas de fuerza el campo eléctrico.
3. Aplicar el principio de superposición al cálculo de la fuerza sobre una carga producida por varias cargas puntuales.

1. En la unidad anterior se vió que todo cuerpo con masa tiene asociado en su vecindad un vector \vec{g} de campo gravitacional. Ahora si se coloca una carga de prueba en el espacio que rodea a un cuerpo cargado, se observa que existe una fuerza sobre ella. Entonces se dice que existe un campo eléctrico. Antiguamente la fuerza electrostática entre cuerpos cargados se explicaba por una acción a distancia, instantánea, entre ellos; actualmente el concepto de campo explica dicho mecanismo de la siguiente manera: Toda carga q_1 define un campo eléctrico en el espacio que la rodea; el campo eléctrico

actúa sobre una carga q_2 que se encuentre en él. Entonces, el campo juega el papel de intermediario de las fuerzas entre cargas eléctricas. Entonces el mecanismo es

$$\text{carga} \Rightarrow \text{campo} \Rightarrow \text{carga}$$

Para definir operacionalmente el campo eléctrico, se coloca una carga eléctrica de prueba q_2 (definida como positiva) en el punto del espacio que va a ser examinado, y se mide la fuerza eléctrica \vec{F}_{12} (si existe alguna) que actúa sobre esta carga. El campo eléctrico \vec{E}_{12} de la carga 1 en la posición de la carga 2 de prueba se define como:

$$\vec{E}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_2} = k \frac{q_1}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Como se ve en (6), \vec{E}_{12} es un vector, ya que \vec{F}_{12} lo es, y q_2 es un escalar. La dirección y sentido de \vec{E}_{12} son las mismas que la de \vec{F}_{12} .

La definición de campo gravitacional \vec{g} es muy parecida a la del campo eléctrico, excepto que allá es la masa del cuerpo de prueba mientras que aquí es la carga la propiedad de interés. Aunque las unidades de \vec{g} usualmente se escriben como m/s^2 , también podrían haberse escrito N/kg . De aquí que para \vec{E} sean N/C . Entonces ya sea \vec{g} ó \vec{E} , están expresadas como una fuerza dividida por una propiedad (masa ó carga) del cuerpo de prueba.

2. Gráficamente, también se representa el campo electrostático de uno ó varios cuerpos mediante líneas de fuerza. Sin embargo, en el caso eléctrico existen dos tipos de cargas que producen fuerzas de atracción y repulsión. En las figuras 2 (a) y (b) se muestran las líneas de campo o de fuerzas de algunos cuerpos.

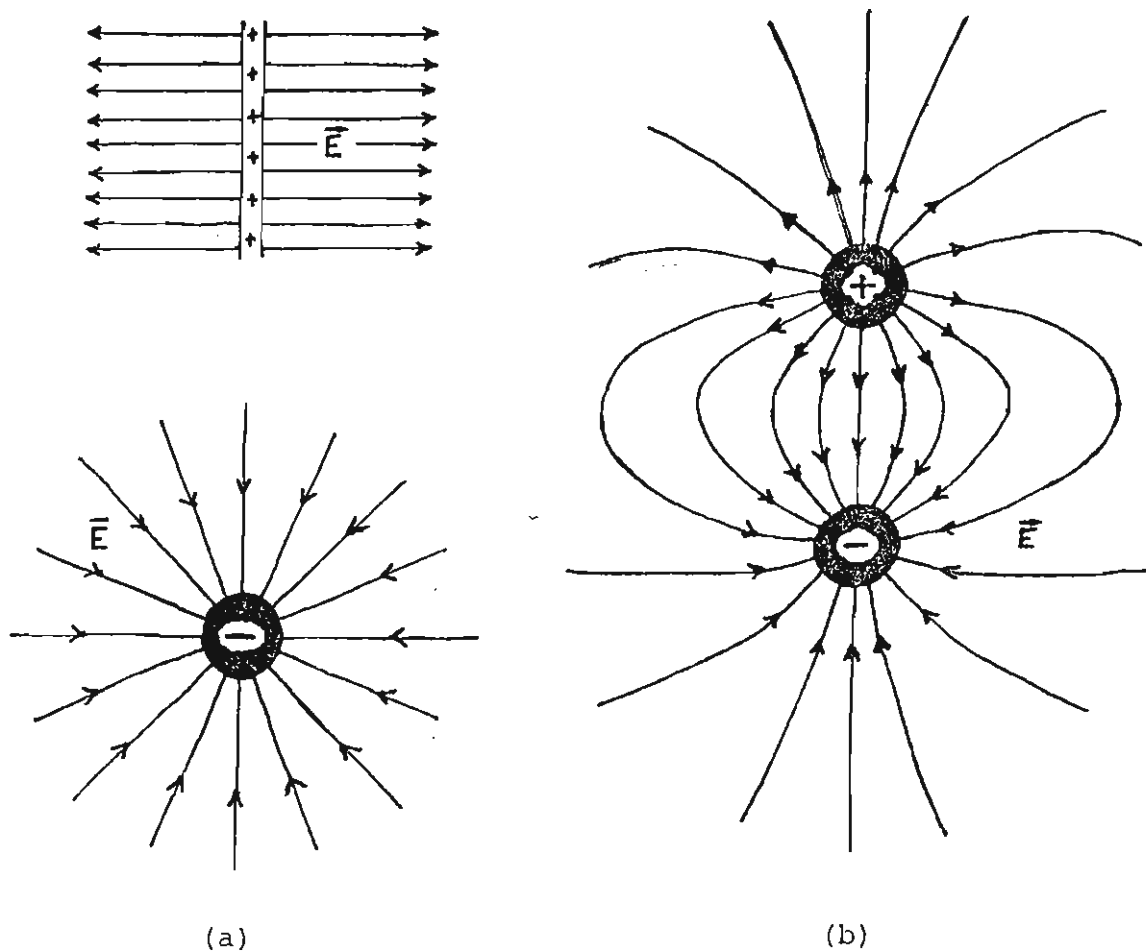


Figura 2. (a) Lámina infinita cargada positivamente y esfera cargada negativamente; (b) Esferas con cargas iguales pero de signo opuesto.

6.3 Dipolo eléctrico

1. Definir el dipolo eléctrico.
 2. Calcular el campo del dipolo eléctrico y definir el momento dipolar eléctrico.
1. La figura 3 muestra una carga positiva y una carga negativa de igual magnitud q y diferente signo (también vea la figura 2(b)) y

separadas por una distancia $2a$. A dicha configuración se le llama un dipolo eléctrico.

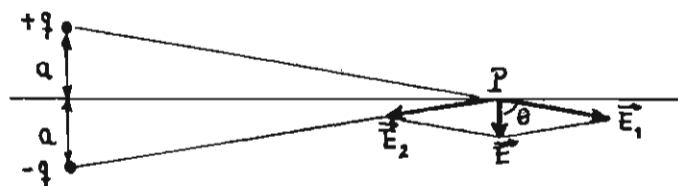


Figura 6.3 Dipolo Eléctrico

2. Ahora bien, ¿Cuál es el campo \vec{E} debido a esas cargas en el punto P, alejado una distancia r sobre la mediatriz del segmento que une dichas cargas?. Supóngase que $r \gg a$. Por el principio de superposición, el campo en P será

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

de la relación (6)

$$E_1 = E_2 = K \frac{q}{a^2 + r^2}$$

El vector suma de \vec{E}_1 y \vec{E}_2 apunta verticalmente hacia abajo y tiene la magnitud

$$E = 2E_1 \cos \theta$$

De la figura 3

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

y sustituyendo las expresiones para E_1 y $\cos \theta$ en E

$$E = 2K \frac{q}{(a^2 + r^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = K \frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

Con la suposición de que $r \gg a$, se puede despreciar a en el denominador. Entonces

$$E \approx K \frac{(2a)(q)}{r^3}$$

Se ve de la relación anterior que las propiedades q y $2a$ del dipolo sólo figuran como producto. Esto significa que si se mide \vec{E} a ciertas distancias del dipolo (con $r \gg a$) nunca se puede identificar a q y a $2a$ separadamente, sino como producto $2aq$.

El producto $2aq$ se define como el momento dipolar eléctrico P . Entonces reescribiendo esta relación para E , para puntos distantes sobre la mediatriz, se tiene:

$$E = K \frac{P}{r^3}$$

El valor de E para puntos distantes sobre el eje dipolar y, en general, para cualquier punto distante, también sólo contiene a las propiedades q y $2a$ como el producto $2aq$ ($=P$). En general, para puntos distantes del dipolo, E varía como $1/r^3$.

6.4 Conductores y aislantes

1. Proponer modelos para los cuerpos conductores y para los aislantes.
2. Analizar el campo eléctrico dentro y fuera de un conductor cargado.

1. Como se vió en 6.1, la motivación del estudio de la electrostática nació al observar las propiedades que adquirirían los cuerpos al frotarlos. Aquí cabe agregar que cuando se frotaban cuerpos metálicos, éstos no parecían generar carga alguna, aunque si se sujetaban a un soporte de vidrio o plástico sí aparecía en ellos una carga si no se les tocaba con las manos. La explicación es que los metales, el cuerpo humano y la Tierra son conductores de la electricidad mientras que el vidrio, los plásticos, etc. son aisladores (también llamados dieléctricos).

En los conductores las cargas eléctricas están libres para moverse a través del material mientras que en los aisladores esto no sucede. Aunque no existen aisladores perfectos, la propiedad aislante del cuarzo fundido es del orden 10^{25} veces mayor que para el cobre, para muchos fines prácticos algunos materiales se comportan como aislantes perfectos.

Para los metales, puede mostrarse que la carga negativa es la que se mueve. Los portadores reales en los metales son los electrones libres. Cuando los átomos aislados se unen para formar un sólido metálico, los electrones más externos del átomo no permanecen ligados a los átomos individuales sino que están libres para moverse a través de todo el volumen del sólido.

2. El modelo explicado arriba para metales es útil en la interpretación de lo que sucede en un conductor aislado y cargado. Cuando en un conductor se coloca un exceso de carga se establecen campos eléctricos dentro y fuera del mismo. Estos campos actúan sobre los portadores de carga, los electrones, dentro del conductor y ocasionan que se muevan, esto es, se generan corrientes eléctricas internas. Estas corrientes redistribuyen el exceso de carga de tal forma que reducen la magnitud de los campos eléctricos internos. Eventualmente los campos eléctricos dentro del conductor desaparecen en todas partes, automáticamente deja de haber corriente y se establecen una situación estática. Así también como la carga en exceso se repele dentro del conductor, tiende a distribuirse en la superficie del mismo. Por lo tanto, dentro de un conductor aislado y con carga en exceso $\vec{E} = 0$ y dicha carga se distribuye en su superficie. Fuera del conductor el campo eléctrico será distinto de cero.

6.5 Problemas

01. Las cargas y las coordenadas de dos partículas cargadas fijas en el plano x-y son: $q_1 = +3.0 \times 10^{-6} \text{C}$, $x_1 = 3.5 \text{ cm}$, $y_1 = 0.5 \text{ cm}$, y $q_2 = -4.0 \times 10^{-6} \text{C}$, $x_2 = -2.0 \text{ cm}$, $y_2 = 1.5 \text{ cm}$. (a) Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza sobre q_2 . (b) ¿Dónde colocaría una tercera carga $q_3 = +4.0 \times 10^{-6} \text{C}$, tal que la fuerza total sobre q_2 sea cero?

02. Dibuje las líneas de fuerza de un sistema de partículas formado por dos cargas separadas una distancia r cuando: (a) las cargas sean iguales a q ; (b) cuando una tenga carga $q_1 = +q$ y la otra $q_2 = -2q$.

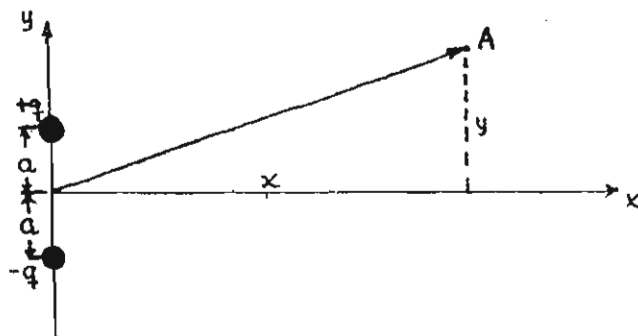
03. (a) ¿Qué carga positiva tendría que colocarse en la superficie de la Tierra y de la Luna para neutralizar su atracción gravitacional? (b) ¿Se necesita conocer la distancia Tierra-Luna para resolver el problema? ¿Por qué?

04. Las líneas de fuerza del campo electrostático de cualquier carga nunca se cruzan, ¿Por qué?

05. Demuestre que las componentes de \vec{E} debido a un dipolo, en puntos distantes, están dadas por

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

en donde x e y son las coordenadas de un punto A. Demuestre que este resultado general incluye el obtenido en la teoría cuando A está en la mediatriz del dipolo.



UNIDAD 7. FUERZA Y CAMPO MAGNETOSTATICOS

7.1 Fuerza y campo magnetostáticos

7.2 Problemas

Preparó: Francisco Medina de una selección de los capítulos 29 y 30 del Halliday y Resnick.

Referencias:

U. Haber - Schaim, JB Cross, JH Dodge y JA Walter, PSSC Física, tercera edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975. Capítulo 22.

D. Halliday y R. Resnick, Fundamentos de Física, CECSA, México, 1978. Secciones 29-1 a 29-3 y 30-2 a 30-4.

7.1 Fuerza y campo magnetostáticos

1. Definir vector de campo magnético; expresar la fuerza de Lorentz
2. Calcular la fuerza que produce un campo magnético sobre un conductor recto que trasporta corriente
3. Determinar el campo magnético producido por un alambre que trasporta corriente
4. Determinar la fuerza entre dos alambres paralelos que trasportan corriente.

1. Se dice que el espacio que rodea a un imán o a un conductor que trasporta corriente es asiento de un campo magnético, de la misma manera en que se dice que el espacio vecino a una barra cargada es asiento de un campo eléctrico. A continuación se definirá el vector básico del campo magnético \vec{B} . Puede representarse por las líneas de \vec{B} , de la misma forma que el campo eléctrico está representado por las líneas de \vec{E} . Igual que en el campo eléctrico, el vector de campo magnético está relacionado con sus líneas de la siguiente forma:

- a) La tangente a una línea de \vec{B} en un punto dado indica la dirección del campo en ese punto
- b) Las líneas de \vec{B} se dibujan en tal forma que el número de líneas por unidad de área en la sección transversal es proporcional a la mangitud del vector de campo magnético \vec{B} . Donde las líneas están muy concentradas, \vec{B} es grande; donde están muy separadas \vec{B} es pequeña.

Igual que ocurría con el campo eléctrico, el vector de campo \vec{B} es de importancia fundamental, en tanto que las líneas de \vec{B} son sim

plemente una representación gráfica de la forma en que varía \vec{B} a través de cierta región del espacio.

No se tratará aquí de las causas del campo magnético; sólo se determinará (i) si el campo magnético existe en un punto dado P y (ii) la acción de este campo sobre las cargas que se mueven a través de él. Como ocurría con el campo eléctrico, una partícula de carga q_0 funciona como cuerpo de prueba. Se supondrá que no existe un campo eléctrico, lo que significa que no hay fuerza eléctrica actuando sobre el cuerpo de prueba.

Imagínese que una carga de prueba, positiva, tiene una velocidad arbitraria \vec{v} en el punto P. Si sobre este cuerpo actúa una fuerza deflectora lateral \vec{F} , se asegura que en el punto P existe un campo magnético y se define a \vec{B} en términos de \vec{F} , \vec{v} y q_0 . Si se cambia la dirección de \vec{v} en el punto P, manteniendo constante su magnitud, se encuentra que aunque \vec{F} siempre actúa perpendicularmente a \vec{v} la magnitud de \vec{F} cambia. Para una orientación particular de \vec{v} (y también para la dirección opuesta $-\vec{v}$) la fuerza \vec{F} es cero. Esta dirección se define como la dirección de \vec{B} , y la especificación de su sentido (esto es, el sentido en el que apunta a lo largo de esta línea), se tratará posteriormente al dar una definición más completa de \vec{B} .

Una vez especificada la dirección de \vec{B} , puede orientarse a \vec{v} de tal forma que la carga de prueba se mueva perpendicularmente a \vec{B} . En este caso, resulta que la fuerza \vec{F} es un máximo y la magnitud de \vec{B} se define en términos de la magnitud medida de esta fuerza máxima F_1 , esto es

$$B = F_{\perp} / q_0 v \quad (1)$$

Esta definición de \vec{B} (en la que se ha especificado su magnitud y su dirección, pero no su sentido) se considerará como una definición preliminar a la definición vectorial completa, que se enuncia en seguida: si una carga de prueba positiva q_0 , se mueve con una velocidad \vec{v} a través del punto P, y si sobre esta carga actúa una fuerza lateral \vec{F} , existe un campo magnético \vec{B} en el punto P, en donde \vec{B} es un vector que satisface la relación

$$\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

en donde \vec{v} , q_0 , y \vec{F} son cantidades medidas. Según las reglas del producto vectorial la magnitud de la fuerza magnética deflectora \vec{F} , está dada por

$$F = q_0 v B \sin \theta \quad (3)$$

en la que θ es el ángulo entre \vec{v} y \vec{B} .

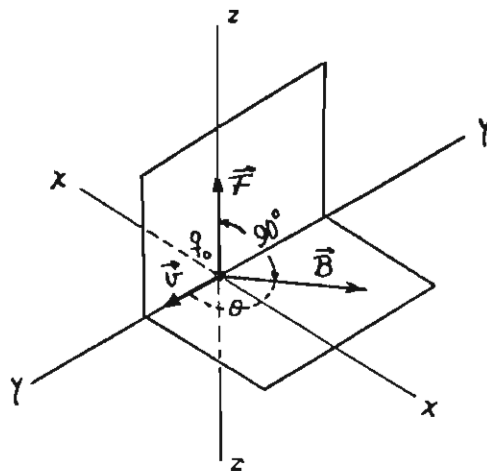


Figura 1.

En la figura 1 se muestra la relación entre estos vectores. En ella se ve que \vec{F} , al estar formando un ángulo recto con el plano definido por \vec{v} y \vec{B} , siempre formará un ángulo recto con \vec{v} (y tam

bién con \vec{B}) y, por lo tanto, siempre será una fuerza lateral. La ecuación 3 está de acuerdo con los hechos observados de que (a) la fuerza magnética se anula a medida que $\vec{v} \rightarrow 0$, (b) la fuerza magnética se anula cuando \vec{v} es paralela o antiparalela a la dirección de \vec{B} (en estos casos, $\theta = 0$ ó $\theta = 180^\circ$ y $\vec{v} \times \vec{B} = 0$) y (c) si \vec{v} es perpendicular a \vec{B} ($\theta = 90^\circ$), la fuerza deflectora tiene un máximo valor, dado por la ecuación 1; esto es, $F_L = q_0 v B$.

En esencia, esta definición de \vec{B} es semejante a la definición del campo eléctrico \vec{E} , que puede expresarse en la siguiente forma: si una carga de prueba positiva se coloca en un punto P y si sobre esta carga estacionaria actúa una fuerza (eléctrica) \vec{F} , entonces existe un campo eléctrico \vec{E} en el punto P, en donde \vec{E} es un vector que satisface la relación

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (4)$$

en donde q_0 y \vec{F} son cantidades medidas. Al definir a \vec{E} , la única dirección característica es la fuerza eléctrica \vec{F} que actúa sobre el cuerpo de prueba positivo; la dirección de \vec{E} es la misma que la de \vec{F} . Al definir a \vec{B} , existen dos direcciones características: la de \vec{v} y la de fuerza magnética \vec{F}_B .

Si una partícula cargada se mueve en una región en la que existen tanto un campo eléctrico como un campo magnético, la fuerza resultante se encuentra combinando las ecuaciones 2 y 4 esto es

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} + q_0 \vec{v} \times \vec{B}$$

A esta ecuación se le llama la relación de Lorentz. La unidad de \vec{B} que se obtiene de la ecuación 3 es el (N/C)(m/s). A esta unidad se le da el nombre especial de Weber/metro² y se emplea el símbolo

de Wb/m^2 o tesla, T. Teniendo en cuenta que C/s es igual a un amperere, A, se tendrá

$$1. \text{tesla} = 1 \text{ weber/metro}^2 = \frac{\text{N}}{\text{C(m/s)}} = \frac{\text{N}}{\text{Am}}$$

2. Una corriente es un conjunto de cargas en movimiento. Debido al hecho de que un campo magnético ejerce una fuerza lateral sobre una carga móvil, se espera que también ejerza una fuerza lateral en un alambre que trasporta una corriente. La figura 2 muesu

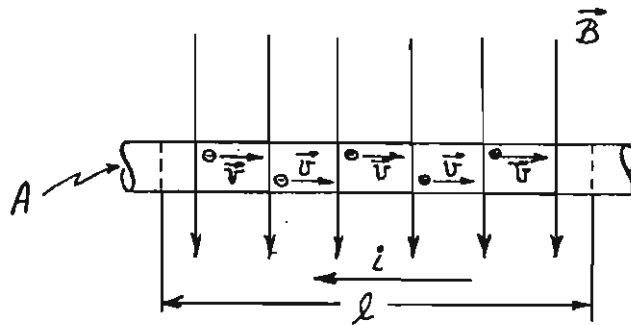


Figura 2.

tra una sección de longitud ℓ de un alambre que trasporta una corriente i colocado en un campo magnético B y perpendicular a éste. La corriente i de un alambre metálico es transportada por los electrones libres, o de conducción, de los cuales hay n por unidad de volumen de alambre. La magnitud de la fuerza promedio sobre uno de tales electrones está dada por la ecuación 3 6, ya que $\theta = 90^\circ$, por

$$F' = q_0 v B \sin \theta = e v_d B,$$

en donde v_d es la velocidad de arrastre. Para relacionar esta velocidad con la corriente, consideremos un tramo de alambre de longitud $\ell = v_d \Delta t$. El número de electrones que contiene este tramo es $n(v_d \Delta t)A$, donde A es el área de la sección del alambre, y la carga total $q_0 n(v_d \Delta t)A$. Ahora bien, en el tiempo Δt , todos los electrones en el tramo considerado pasan por la sección 2, traspor-

tando una carga igual a $i \Delta t$. Se tendrá que $i \Delta t = q_0 n (v_d \Delta t) A$, y por lo tanto

$$i = q_0 n v_d A$$

Puesto que el tramo de alambre considerado tiene el volumen Al , la fuerza total sobre los electrones libres en el alambre y, por lo tanto, sobre el alambre mismo será

$$F = (nAl)F' = nAlq_0 v_d B = (q_0 n v_d A)lB$$

o bien,

$$F = ilB. \quad (5)$$

Las cargas negativas que se mueven hacia la derecha en el alambre de la figura 2 son equivalentes a cargas positivas que se mueven hacia la izquierda, esto es, en la dirección de la flecha de la corriente. La velocidad \vec{v} de tales cargas apunta hacia la izquierda y la fuerza sobre el alambre, dada por la ecuación 2, apunta hacia afuera de la página. Se puede llegar a esta misma conclusión considerando a los verdaderos transportadores de carga (negativos) para los cuales \vec{v} apunta hacia la derecha, como se muestra en la figura 2 pero q_0 tiene signo negativo. Consecuentemente, midiendo la fuerza magnética lateral sobre el alambre que transporta corriente, colocado en un campo magnético, no puede decirse si los transportadores de carga son cargas negativas que se mueven en un sentido dado o cargas positivas que se mueven en sentido opuesto. La ecuación 5 se cumple sólo si el alambre está colocado perpendicularmente a \vec{B} . La situación más general puede expresarse en forma vectorial de la siguiente manera

$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}, \quad (6)$$

En donde \vec{l} es un vector que apunta a lo largo del alambre (recto) en la dirección de la corriente. La ecuación 6 es equivalente a la relación $\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B}$; cualquiera de las dos puede considerarse como la ecuación que define a \vec{B} . Nótese que el vector \vec{l} en la figura 2 apunta hacia la izquierda y que la fuerza magnética \vec{F} apunta hacia arriba y hacia afuera de la página. Estos resultados concuerdan con la conclusión obtenida al analizar las fuerzas que actúan sobre los transportadores de carga individuales.

3.. Se encuentra experimentalmente que cargas en movimiento producen un campo magnético. Se considerara un caso simple: el del campo magnético producido por una corriente que fluye en un alambre recto y largo.

En la figura 3 se muestra las líneas que representan al campo \vec{B} en la vecindad de éste. Si i es la corriente que transporta el alambre y r la distancia del punto al alambre, el valor de B está dado por

$$B = \mu_0 i / 2\pi r \quad (5)$$

donde $\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ Wb/Am.}$

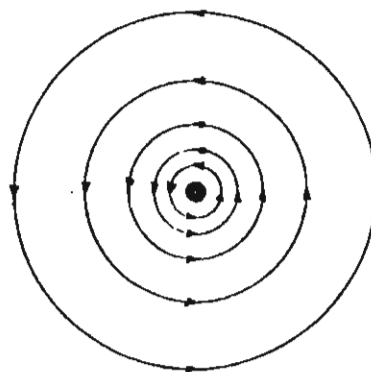
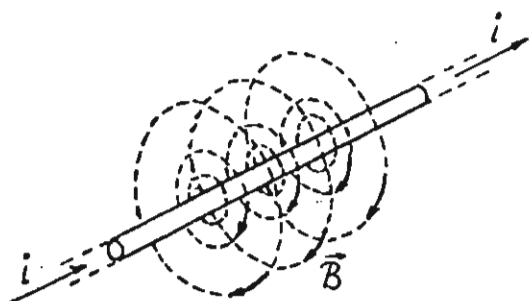


Figura 3.

4. En la figura 4 se muestra dos alambres largos paralelos separados por una distancia d y que trasportan corrientes i_a e i_b . El alambre a de la figura 4 producirá un campo magnético \vec{B}_a en todos sus puntos vecinos. La magnitud de \vec{B}_a , debido a la corriente i_a , en el sitio en el cual está colocado el segundo alambre, es de la ecuación 5,

$$B_a = \mu_0 i_a / 2\pi d$$

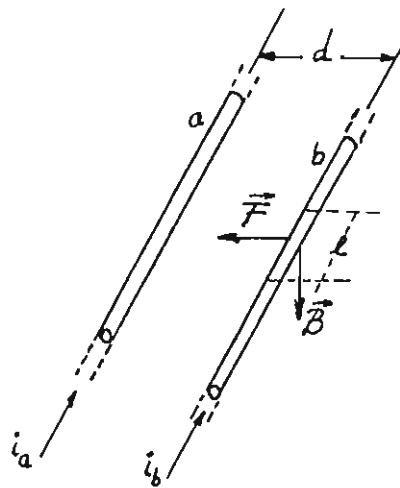


Figura 4.

La regla de la mano derecha muestra que la dirección de \vec{B}_a en el alambre b es hacia abajo, tal como se muestra en la figura.

El alambre b, que trasporta una corriente i_b , se encuentra inmerso en un campo magnético externo \vec{B}_a . Una cierta longitud l de este alambre experimentará una fuerza magnética lateral y la magnitud de la fuerza por unidad de longitud es

$$(F_b/l) = i_a B_a = \mu_0 i_b i_a / 2\pi d \quad (6)$$

La regla vectorial para asignar signos indica que F_b/l se encuentra en el plano de los alambres y apunta hacia la izquierda en la figura 4.

Se hubiese podido considerar primero al alambre b, calculando el campo magnético que se produce en la posición del alambre a y después calcular la fuerza por unidad de longitud sobre el alambre a. En este caso, F_a/l habría apuntado hacia la derecha si las corrientes son paralelas. La fuerza que un alambre ejerce sobre el otro es igual y opuesta, como debe ser de acuerdo con la ley de acción y reacción de Newton. Cuando las corrientes son antiparalelas los dos alambres se repelen.

Esta discusión recuerda la discusión del campo eléctrico entre dos cargas puntuales. En este caso se vió que las cargas actúan la una sobre la otra a través de un campo eléctrico intermediario. Los conductores de la figura 30-8 actúan el uno sobre el otro a través del campo magnético intermediario. Puede pensarse en un esquema en los siguientes términos.

$$\text{corriente} \rightleftharpoons \text{campo} \rightleftharpoons \text{corriente}$$

y no, por el punto de vista de acción a distancia, en los términos

$$\text{corriente} \rightleftharpoons \text{corriente}$$

La atracción entre los alambres largos paralelos se utiliza para definir al ampere. Supóngase que los alambres separados 1m ($d = 1.0 \text{ m}$) y que trasportan corrientes iguales ($i_a = i_b = i$). Si la

corriente (común) se ajusta hasta que, mediante una medida, la fuerza de atracción por unidad de longitud entre los alambres es de 2×10^{-7} N/m, la corriente que circula es, por definición, 1A. De la ecuación 6:

$$F/l = \mu_0 i^2 / 2\pi d = (4 \times 10^{-7} \text{ Wb/Am}) (1\text{A})^2 / 2\pi (1\text{m}) = 2 \times 10^{-7} \text{ N/m}.$$

Así, en el Sistema Internacional de Unidades el ampere (con a minúscula) es la corriente eléctrica constante que, si es transportada por dos conductores rectilíneos, de longitud infinita y sección despreciable, separados por 1 metro en el vacío, produciría una fuerza entre esos conductores igual a 2×10^{-7} newton por metro de longitud.

7.2 Problemas

01. (Figura 01) Un alambre de 60 cm de longitud y de masa igual a 10^{-2} kg está suspendido mediante un par de alambres flexibles dentro de un campo magnético de 0.40 Wb/m^2 . Determinar la magnitud y la dirección de la corriente necesaria para que desaparezca la tensión en los alambres que lo soportan.
02. Un alambre de 50 cm de longitud se encuentra a lo largo del eje x y transporta una corriente de 0.50 A en la dirección positiva del eje x. Existe un campo magnético cuyo valor en Wb/m^2 está dado por $\mathbf{B} = 0.003 \mathbf{j} + 0.010 \mathbf{k}$. Encontrar los componentes de la fuerza que actúa sobre el alambre.
03. Un alambre conductor de 0.20 cm de longitud lleva una corriente de 3.0 A es colocado en un campo magnético uniforme de 5 Wb/m^2 haciendo un ángulo de 45° con el campo. Determine la fuerza sobre el alambre.
04. Un alambre recto y largo transporta una corriente de 50A. Un electrón que viaja a $1.0 \times 10^7 \text{ m/s}$ se encuentra a 5m del alambre ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre el electrón si su velocidad está dirigida (a) hacia el alambre, (b) paralelo al alambre y (c) perpendicularmente a las direcciones definidas en (a) y en (b)?
05. Un alambre recto y largo transporta una corriente de 63A. Paralelamente al alambre y en la dirección de la corriente se lanza un protón a una distancia de 10cm del alambre y con una velocidad de 10^6 m/s . ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre el protón?
06. (Figura 02) Dos alambres paralelos muy largos portan las corrientes indicadas. Determinar la magnitud y la dirección de \vec{B} en los puntos P, Q y R. Repetir el cálculo anterior cuando se invierte el sentido de la corriente I_2 permaneciendo constante su magnitud.
07. (Figura 03) Tres alambres largos son perpendiculares al plano del papel y portan las corrientes indicadas. (a) Si $I_1 = I_2 = I_3 = 10 \text{ A}$ dirigidas hacia afuera del papel, determinar la magnitud y la dirección del campo magnético en A; (b) Calcular lo mismo que en (a). si se invierte el sentido de la corriente I_2 .

C.8 (Figura 04) Determinar la fuerza resultante que actúa sobre la espira.

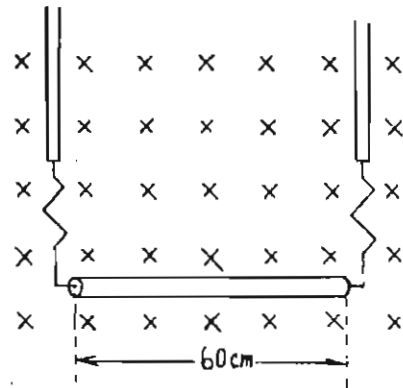


Figura 01

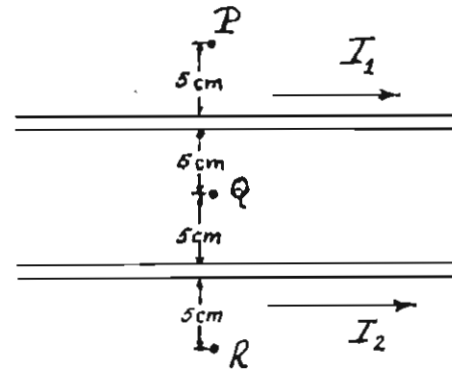


Figura 02

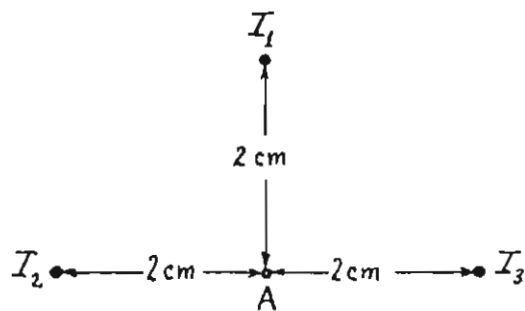


Figura 03

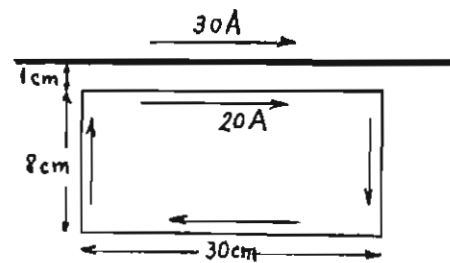


Figura 04

Fuerza y equilibrio La edición
Se terminó de imprimir en estuvo a cargo de
el mes de enero de 2007 la Sección de Producción
en los talleres de la Sección y Distribución Editoriales
de Impresión y Reproducción de la Se imprimieron
Universidad Autónoma Metropolitana 50 ejemplares más sobrantes
Unidad Azcapotzalco para reposición.

2892822

UAM
QC73
M4.35

2892822
Medina Nicolau, Francisco
Fuerza y equilibrio / Fra

ISBN 978654497-6



9 780706 544973

FUERZA Y EQUILIBRIO

MEDINA

35348



\$ 16.00